Bachelorarbeit

# Der Kohomologiering einer endlichen Gruppe


vorgelegt von
**Elias Rahmani Azad**
Matrikelnr.: 3037598

am 27.06.2019


Betreuer
**Prof. Dr. Jan Kohlhaase**
Fakultät für Mathematik
Universität Duisburg-Essen

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Das Thema der Bachelorarbeit ist der Kohomologiering einer endlichen Gruppe, einem der grundlegenden Resultate der Kohomologietheorie. Ziel dieser Arbeit ist es, zunächst einmal dessen algebraische Eigenschaften zu verstehen und später die weitere Struktur des Kohomologieringes zu diskutieren.

Dafür werden wir zu Beginn erst einmal einige Resultate aus der homologischen Algebra erarbeiten, die wir als Vorbereitung benötigen. Aufbauend darauf definieren wir das sogenannte Cup-Produkt, eine Verknüpfung auf der Kohomologieebene. Versehen mit diesem Cup-Produkt wird der Kohomologiering zu einem graduierten Ring.

Weiter wollen wir konkrete Beispiele betrachten und den Kohomologiering für zyklische p-Gruppen explizit angeben. Mit Hilfe der Künneth-Formel können wir diesen dann für jede endliche abelsche Gruppe berechnen.

Abschließendes Ziel der Arbeit ist es, die weitere Struktur des Kohomologieringes zu untersuchen und grundlegende Eigenschaften zu verstehen. Besonders von Interesse sind dabei die Sätze von Evens und Quillen. Der Satz von Evens trifft eine Aussage darüber, unter welchen Voraussetzungen der Kohomologiering noethersch ist, während der Satz von Quillen besagt, wie man dessen Krulldimension bestimmen kann. Um letzteren Satz zu beweisen, müssen wir uns mit den Definitionen einer minimalen projektiven Auflösung, sowie der Poincaré-Reihe eines graduierten Vektorraums befassen. Zum Verständnis der Arbeit werden grundlegende Kenntnisse der homologischen Algebra, sowie ein Verständnis von Ext-Gruppen an den Leser vorausgesetzt. Das betrifft insbesondere Komplexe von Moduln und den Begriff der Homotopie.

Ich möchte mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. Kohlhaase bedanken, der diese Bachelorarbeit betreut hat und bei Fragen stets hilfsbereit war. Vor allem gebührt mein Dank seiner fachlichen Unterstützung sowie seiner außerordentlichen Geduld und Mühe beim Vermitteln mathematischen Wissens.

Des Weiteren bedanke ich mich bei meinen Kommilitonen und Freunden Cedric Nguepnang und Yogendra Puvanenthiran für den überaus hilfreichen Austausch und ihre Anregungen während meines Studiums.

# 2 Vorbereitung

Bevor wir zum eigentlichen Thema der Arbeit kommen, wollen wir zu Beginn einige Resultate aus der homologischen Algebra betrachten, die wir später benötigen werden. Das Kapitel orientiert sich nah an dem Buch [Bos13]. Zunächst wollen wir die Definition von Tor-Moduln wiederholen und einige Eigenschaften sowie die Struktur von Doppelkomplexen behandeln. Für Ext-Gruppen $Ext^n_R(M, N)$ setzen wir die entsprechenden Aussagen als bekannt voraus (vgl. [Bos13], Kapitel 5.4).

**Definition 2.1.** *Ist $M_\bullet \to M$ eine projektive homologische Auflösung des $R$-Moduls $M$ und ist $E$ ein $R$-Modul, dann ist der $n$-te Tor-Modul bezüglich $M$ und $E$ definiert als*

$$Tor^R_n(M, E) = H_n(M_\bullet \underset{R}{\otimes} E) \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Insbesondere gilt, dass $Tor^R_0(M, E) = M \underset{R}{\otimes} E$.*

Hierbei ist wie auch im Rest der Arbeit $R$ meistens ein kommutativer Ring mit 1. Damit sind die obigen Tensorprodukte und Tor-Gruppen stets $R$-Moduln. Nun wollen wir zeigen, dass $H_n(M_\bullet \underset{R}{\otimes} E)$ und $H_n(M \underset{R}{\otimes} E_\bullet)$ isomorph zueinander sind. Um dies zu zeigen, benötigen wir etwas Vorbereitung und müssen die Struktur von $H_n(M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet)$ verstehen.

Seien also $M_\bullet$ und $E_\bullet$ zwei Komplexe mit $M_n = E_n = 0$ für $n < 0$. Dann fassen wir das Tensorprodukt $M_p \underset{R}{\otimes} E_q$ als Doppel-Komplex

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 & M_2 \underset{R}{\otimes} E_0 \arrow[l] \arrow[d, "d'"] & M_2 \underset{R}{\otimes} E_1 \arrow[l] \arrow[d] & M_2 \underset{R}{\otimes} E_3 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
0 & M_1 \underset{R}{\otimes} E_0 \arrow[l] \arrow[d] & M_1 \underset{R}{\otimes} E_1 \arrow[l, "d''"'] \arrow[d] & M_1 \underset{R}{\otimes} E_3 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
0 & M_0 \underset{R}{\otimes} E_0 \arrow[l] \arrow[d] & M_0 \underset{R}{\otimes} E_1 \arrow[l] \arrow[d] & M_0 \underset{R}{\otimes} E_3 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

auf und betrachten den daraus entstehenden einfachen Kettenkomplex $M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet$, der gegeben ist durch

$$(M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet)_n = \bigoplus_{p+q=n} M_p \underset{R}{\otimes} E_q, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Randabbildungen sind dann gegeben durch

$$d_n = d' + \tilde{d}'' : (M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet)_n \to (M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet)_{n-1},$$

wobei $\tilde{d}'' = (-1)^p d''$ die Abbildung auf dem Pfeil mit Index $p$ im Doppel-Komplex ist. Wir müssen noch zeigen, dass es sich tatsächlich um einen Kettenkomplex handelt. Dafür ersetzen wir $d''$ durch $\tilde{d}''$ im obigen Diagramm. Dann gilt in jedem Quadrat des Diagramms, dass $d' \circ \tilde{d}'' + \tilde{d}'' \circ d' = 0$. Damit ist gezeigt, dass $d_n \circ d_{n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wie gefordert. Folglich ist $(M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet, d)$ ein Kettenkomplex.

Je zwei Morphismen von Komplexen $M'_\bullet \to M$ und $E'_\bullet \to E$ induzieren kanonische Morphismen

$$M'_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet \to M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet \quad \textit{und} \quad M_\bullet \underset{R}{\otimes} E'_\bullet \to M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet$$

zwischen einfachen Komplexen, so wie oben eingeführt. Nun wollen wir den Fall solcher Homorphismen betrachten, bei denen $M'_\bullet \to M_\bullet$ bzw. $E'_\bullet \to E_\bullet$ homologische Auflösungen von gegebenen $R$-Moduln $M$ und $E$ sind.

**Proposition 2.2.** (Vgl. [Bos13], Proposition 5.3.1) *Seien $M'_\bullet \to M$ und $E'_\bullet \to E$ projektive Auflösungen der beiden $R$-Moduln $M$ und $E$, dann induzieren die kanonischen Komplexhomorphismen*

$$M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet \to M_\bullet \underset{R}{\otimes} E \quad \textit{und} \quad M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet \to M \underset{R}{\otimes} E_\bullet$$

*Isomorphismen*

$$H_n(M_\bullet \underset{R}{\otimes} E) \xleftarrow{\sim} H_n(M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet) \xrightarrow{\sim} H_n(M \underset{R}{\otimes} E_\bullet), \quad n \in \mathbb{N}$$

*Beweis.* Wir beschränken uns darauf den Komplex-Homomorphismus $M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet \to M \underset{R}{\otimes} E_\bullet$ zu betrachten. Aufgrund der Eigenschaften des Tensorprodukts kann man mit dem Homomorphismus $M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet \to M_\bullet \underset{R}{\otimes} E$ auf die gleiche Weise verfahren, wenn man die Bijektivität zeigen möchte. Im folgenden Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 & M_2 \underset{R}{\otimes} E_0 \arrow[l] \arrow[d, "d'"] & M_2 \underset{R}{\otimes} E_1 \arrow[l] \arrow[d] & M_2 \underset{R}{\otimes} E_3 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
0 & M_1 \underset{R}{\otimes} E_0 \arrow[l] \arrow[d] & M_1 \underset{R}{\otimes} E_1 \arrow[l, "d''"'] \arrow[d] & M_1 \underset{R}{\otimes} E_3 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
0 & M_0 \underset{R}{\otimes} E_0 \arrow[l] \arrow[d] & M_0 \underset{R}{\otimes} E_1 \arrow[l] \arrow[d] & M_0 \underset{R}{\otimes} E_3 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
0 & M \underset{R}{\otimes} E_0 \arrow[l] \arrow[d] & M \underset{R}{\otimes} E_1 \arrow[l] \arrow[d] & M \underset{R}{\otimes} E_3 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

sei die untere Zeile der Komplex $M \underset{R}{\otimes} E_\bullet$ und der darüber liegende Teil der zu $M_\bullet$ und $E_\bullet$ gehörende Doppel-Komplex, wie oben erklärt. Da jeder projektive Modul, als direkte Summe freier Moduln aufgefasst, flach ist, erhalten wir folgende Exaktheitseigenschaften im obigen Diagramm:

(i) Jede Zeile ist exakt an der Stelle mit Spaltenindex $q > 0$, außer der unteren Zeile.

(ii) Alle Spalten sind exakt.

Nun betrachten wir den Komplex-Homomorphismus $M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet \to M \underset{R}{\otimes} E_\bullet$ und den induzierten Homomorphismus

$$\sigma_n : H_n(M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet) \to H_n(M \underset{R}{\otimes} E_\bullet), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es verbleibt zu zeigen, dass diese bereits Isomorphismen sind. Beginnen wir mit der Surjektivität. Um zu zeigen, dass $\sigma_n$ surjektiv ist, starten wir mit einem Element $\bar{x} \in H_n(M \underset{R}{\otimes} E_\bullet)$ und wählen einen Repräsentanten

$$x \in Z_n(M \underset{R}{\otimes} E_\bullet) \subseteq M \underset{R}{\otimes} E_n.$$

Wir wollen ein Element in

$$Z_n(M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet) \subseteq \bigoplus_{p+q=n} M_p \underset{R}{\otimes} E_q$$

konstruieren, welches ein Urbild von $\bar{x}$ repräsentiert. Wähle dafür ein Urbild $x_{0,n} \in M_0 \underset{R}{\otimes} E_n$ von $x$. Im Allgemeinen ist dies kein Element von $Z_n(M_0 \underset{R}{\otimes} E_n)$, aber wir können ein Element $x_{1,n-1} \in M_1 \underset{R}{\otimes} E_{n-1}$ finden, so dass

$$d'(x_{1,n-1}) + (-1)^0 d''(x_{0,n}) = 0.$$

Dies ist möglich, weil $x \in Z_n(M \underset{R}{\otimes} E_\bullet)$ impliziert, dass das Bild von $x_{0,n}$ unter

$$d'' : M_0 \underset{R}{\otimes} E_n \to M_0 \underset{R}{\otimes} E_{n-1}$$

in

$$ker(M_0 \underset{R}{\otimes} E_{n-1} \to M \underset{R}{\otimes} E_{n-1}) = im(M_1 \underset{R}{\otimes} E_{n-1} \xrightarrow{d'} M_0 \underset{R}{\otimes} E_{n-1})$$

enthalten ist. Auf die gleiche Weise kann man Elemente $x_{2,n-2} \in M_2 \underset{R}{\otimes} E_{n-2}$ konstruieren, so dass

$$d'(x_{2,n-2}) + (-1)^1 d''(x_{1,n-1}) = 0$$

ist und so weiter. Der Vorgang endet mit $x_{n,0} \in M_n \underset{R}{\otimes} E_0$ und wir sehen, dass per Konstruktion

$$x_{0,n} \oplus ... \oplus x_{n,0} \in Z_n(M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet)$$

Dann gilt, dass dieses Element ein Urbild von $\bar{x}$ unter $\sigma_n : H_n(M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet) \to H_n(M \underset{R}{\otimes} E_\bullet)$ repräsentiert. Folglich ist $\sigma_n$ surjektiv.
Um zu zeigen, dass $\sigma_n$ injektiv ist, betrachten wir ein Element

$$x_{0,n} \oplus ... \oplus x_{n,0} \in Z_n(M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet), \quad x_{p,q} \in M_p \underset{R}{\otimes} E_q,$$

dessen Bild $x$ unter $M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet \to M \underset{R}{\otimes} E_\bullet$ in $B_n(M \underset{R}{\otimes} E_n)$ liegt. Dann ist $x$ das Bild von $x_{0,n}$ unter der Abbildung $M_0 \underset{R}{\otimes} E_n \to M \underset{R}{\otimes} E_n$. Um zu zeigen, dass

$$x_{0,n} \oplus ... \oplus x_{n,0} \in B_n(M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet),$$

wähle ein Urbild von $x$ in $M \underset{R}{\otimes} E_{n+1}$ und davon wieder ein Urbild $y_{0,n+1} \in M_0 \underset{R}{\otimes} E_{n+1}$. Dann liegt

$$x_{0,n} - (-1)^0 d''(y_{0,n+1})$$

im Kern von $M_0 \underset{R}{\otimes} E_n \to M \underset{R}{\otimes} E_n$ und liefert somit ein Urbild $y_{1,n} \in M_1 \underset{R}{\otimes} E_n$. Unter der Verwendung des obigen Elementes $x_{0,n} \oplus ... \oplus x_{n,0}$ folgt, dass

$$\begin{aligned} d'(x_{1,n-1} - (-1)^1 d''(y_{1,n})) &= d'(x_{1,n-1}) + (-1)^0 d'' d'(y_{1,n}) \\ &= d'(x_{1,n-1}) + (-1)^0 d''(x_{0,n} - (-1)^0 d''(y_{0,n+1})) \\ &= d'(x_{1,n-1}) + (-1)^0 d''(x_{0,n}) = 0 \end{aligned}$$

und wir sehen, dass $x_{1,n-1} - (-1)^1 d''(y_{1,n})$ ein Urbild von $y_{2,n-1} \in M_2 \underset{R}{\otimes} E_{n-1}$ liefert. Wiederholt man diese Konstruktion, erhält man letztendlich ein Element

$$y_{0,n+1} \oplus ... \oplus y_{n+1,0} \in (M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet)_{n+1},$$

so dass

$$d(y_{0,n+1} \oplus ... \oplus y_{n+1,0}) = x_{0,n} \oplus ... \oplus x_{n,0}$$

gilt. Es folgt, dass $x_{0,n} \oplus ... \oplus x_{n,0} \in B_n(M_\bullet \underset{R}{\otimes} E_\bullet)$. Dies zeigt unsere Behauptung. □

*Bemerkung.* Sind $M$ und $N$ zwei $R$-Moduln und mindestens einer von beiden sei projektiv, dann gilt $Tor_n^R(M, N) = 0$ für $n \geq 1$, da aus der Projektivität direkt folgt, dass $M$ bzw. $N$ flach ist.

Abschließend in diesem Kapitel zitieren wir noch ein fundamentales Resultat der homologischen Algebra, auf dem die Unabhängigkeit von Tor- und Ext-Gruppen (bis auf Isomorphie) von der Wahl einer projektiven Auflösung beruht. Für den Beweis wird auf das entsprechende Ergebnis in [Bos13] verwiesen.

**Lemma 2.3.** *Seien $M_* \to M$ und $N_* \to N$ zwei projektive Auflösungen von zwei $R$-Moduln $M$ und $N$ und sei $\varphi : M \to N$ ein $R$-Modul-Homomorphismus. Dann gilt:*

*(i) Es existiert ein Komplex-Homomorphismus $f : M_* \to N_*$, so dass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} M_* & \longrightarrow & M \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ N_* & \longrightarrow & N \end{array}$$

*kommutiert.*

*(ii) Wenn $f, f' : M_* \to N_*$ zwei Komplex-Homomorphismen sind, die die Bedingung in (i) erfüllen, dann sind sie homotop.*

*Beweis.* Vergleiche [Bos13], Lemma 5.1.9. □

*Bemerkung.* Die Tatsache, dass $N_*$ in Teil (i) des vorherigen Lemmas projektiv ist, wird im Beweis nicht verwendet und ist für die Aussage nicht notwendig.

# 3 Der Kohomologiering

Nun wollen wir uns dem Kohomologiering einer endlichen Gruppe widmen. Sei dazu zunächst $G$ eine endliche Gruppe und $R$ ein kommutativer Ring mit Eins. Betrachten wir die Menge

$$R[G] = \{f : G \to R \mid f \text{ ist Abbildung von Mengen}\},$$

die sogenannte Gruppenalgebra von $G$ über $R$. $R[G]$ ist eine $R$-Algebra bezüglich punktweiser Addition und Faltungsprodukt. Ist $\mathbb{1}_g \in R[G]$ die charakteristische Funktion von $g \in G$, dann gilt $\mathbb{1}_g * \mathbb{1}_h = \mathbb{1}_{gh}$, sodass $G \to R[G]^\times, g \mapsto g := \mathbb{1}_g$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist. Wir schreiben daher im Folgenden stets $g$ statt $\mathbb{1}_g$.
Jedes Element $f \in R[G]$ lässt sich als formale Linearkombination

$$\sum_{g \in G} r_g g \text{ mit } r_g \in R \text{ und } g \in R[G]$$

darstellen und $R[G] = \bigoplus_{g \in G} R \cdot g$ ist ein freier $R$-Modul mit Basis $(g)_{g \in G}$.
Des Weiteren lässt sich $R[G]$ als augmentierte $R$-Algebra auffassen. Mit anderen Worten: $R$ lässt sich in $R[G]$ mit dem $R$-Algebra Homomorphismus

$$\epsilon : R[G] \to R; \quad \epsilon(\sum_{g \in G} r_g g) = \sum_{g \in G} r_g$$

einbetten. Dieser wird auch Augmentation von $R[G]$ genannt. Damit wird auch $R$ in trivialer Weise zu einem $R[G]$-Modul durch

$$\underbrace{(\sum_{g \in G} r_g g)}_{\in R[G]} \cdot \underbrace{r}_{\in R} := \underbrace{\sum_{g \in G} r_g r}_{\in R} .$$

Sei nun $M$ ein $R[G]$-Modul, dann heißt der $R$-Modul

$$H^i(G, M) := Ext^i_{R[G]}(R, M)$$

die i-te Kohomologiegruppe von $G$ mit Koeffizienten in $M$. Wir beziehen uns im Nachfolgenden aber stets auf den Fall $M = R$ und betrachten die direkte Summe über alle Kohomologiegruppen ($i \geq 0$)

$$H^*(G, R) := \bigoplus_{i \geq 0} H^i(G, R) = \bigoplus_{i \geq 0} Ext^i_{R[G]}(R, R),$$

den sogenannten Kohomologiering von $G$ über $R$. Dieser ist als direkte Summe von $R$-Moduln zunächst auch nur ein $R$-Modul, hat allerdings sehr viel mehr Struktur, wie wir im nachfolgenden Kapitel sehen werden.

**Beispiel 3.1.** (Vgl. [Ben04], Kapitel 1) Zuerst einmal wollen wir einige grundlegende Beispiele betrachten. Sei also $G$ eine endliche Gruppe und $R$ ein kommutativer Ring. Dann gilt für die 0-te Kohomologiegruppe, dass

$$H^0(G,R) := Ext^0_{R[G]}(R,R) = Hom_{R[G]}(R,R) \cong R,$$

wobei die vorletzte Gleichheit aus den Eigenschaften von Ext-Moduln, genauer gesagt der Exaktheit des Hom-Funktors, resultiert.

Sei jetzt $G$ eine endliche Gruppe und $R$ ein Körper mit Charakteristik $p$, teilerfremd zur Ordnung von $G$. Um für diesen Fall $H^*(G,M)$ zu berechnen, benötigen wir zunächst Maschke's Theorem (vgl. [Iyn04] Theorem 2.6), welches besagt, dass unter den oben genannten Voraussetzungen jede kurze exakte Sequenz von $R[G]$-Moduln zerfällt. Das bedeutet, dass jede kurze exakte Sequenz von $R[G]$-Moduln

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

isomorph ist zu einer kurzen exakten Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

wobei $M_1 \to M_1 \oplus M_2$ die kanonische Injektion ist und $M_1 \oplus M_2 \to M_2$ die Projektion auf den zweiten Faktor ist. Mit anderen Worten, es existiert ein Isomorphismus $M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\sim} M$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_1 \oplus M_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r] & M \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Mit Hilfe dieses Theorems können wir nun die folgende Aussage beweisen: Sei $G$ eine endliche Gruppe und $R$ ein Körper mit $\mathrm{char}(R) \nmid |G|$, dann ist jeder $R[G]$-Modul projektiv. Die Aussagen sind sogar äquivalent. Wir benötigen hier allerdings nur die eine Implikation.

Sei also $M$ ein $R[G]$-Modul, dann wähle einen projektiven Modul $P$ mit einer surjektiven Abbildung $P \twoheadrightarrow M$. So ein Modul existiert immer, denn wähle z.B. $(x_i)_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem von $M$ und setze $P = R^{(I)}$. Dann ist $P$ natürlich projektiv und die Abbildung $P \to M$, welche die kanonische Basis von $P$ auf die Familie $(x_i)_{i \in I}$ abbildet, surjektiv. Nach Maschke's Theorem zerfällt nun jede kurze exakte Sequenz von $R[G]$-Moduln, also insbesondere auch $P \twoheadrightarrow M$. Damit ist $M$ isomorph zu einem direkten Summanden von $P$ und damit auch projektiv. Damit können wir nun den Kohomologiering

$$H^*(G,R) := \bigoplus_{i \geq 0} Ext^i_{R[G]}(R,R)$$

für diesen besonderen Fall sehr einfach genauer bestimmen. Denn wenn alle $R[G]$-Moduln $M$ und $N$ projektiv sind, dann gilt $Ext^i_{R[G]}(M,N) = 0$ für alle $i > 0$. Insbesondere gilt dann

$$H^*(G,R) = H^0(G,R) = Ext^0_{R[G]}(R,R) = R,$$

für alle Körper $R$ mit $\mathrm{char}(R) \nmid |G|$. Aufgrund dieser Tatsache erscheint es sinnvoll, Beispiele zu betrachten, in denen $R$ ein Körper ist mit Charakteristik $p$ und $p \mid |G|$. Das ist der Fall, der uns in dieser Arbeit hauptsächlich interessiert.

# 4 Ringstruktur und Cup-Produkt

Da wir im vorherigen Abschnitt den Kohomologiering

$$H^*(G,R) = \bigoplus_{i\geq 0} H^i(G,R) := \bigoplus_{i\geq 0} Ext^i_{R[G]}(R,R)$$

zunächst als $R$-Modul definiert und das grundlegende (aber triviale) Beispiel von Maschke betrachtet haben, wollen wir nun die weitere algebraische Struktur von $H^*(G,R)$ untersuchen. Dieser hat nicht nur eine Modulstruktur, sondern ist, wie der Name vermuten lässt, ein graduierter Ring.

**Definition 4.1.** *Ein $\mathbb{N}$-graduierter Ring ist ein Ring $R$ zusammen mit additiven Untergruppen $R_n$, $n \in \mathbb{N}$, sodass gilt $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$, als direkte Summe abelscher Gruppen und $R_n R_m \supseteq R_{n+m}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.*

Für je zwei Elemente $a \in H^i(G,R)$ und $b \in H^j(G,R)$ wollen wir nun eine Verknüpfung definieren, sodass diese in $H^{i+j}(G,R)$ liegt. Dazu benötigen wir aber noch etwas Vorbereitung zu Eigenschaften projektiver Auflösungen.
Sei also $(P_\bullet, d)$ eine projektive Auflösung des $R[G]$-Moduls $R$. Dann definieren wir $(Q_\bullet := P_\bullet \underset{R}{\otimes} P_\bullet, \delta)$ als den Komplex mit

$$Q_n = (P_\bullet \underset{R}{\otimes} P_\bullet) := \bigoplus_{i+j=n} P_i \underset{R}{\otimes} P_j$$

und Homomorphismen

$$\delta_n(x \otimes y) := d_i x \otimes y + (-1)^i x \otimes d_j y$$

mit $x \in P_i$ und $y \in P_j$ wie in Abschnitt 1 erläutert. Wir benötigen für die Eigenschaften in $Q_\bullet$ noch das nachfolgende Resultat.

**Proposition 4.2.** (Für Teil (ii) vgl. [Iyn04], Theorem 3.2) *Es gilt*

*(i)* $(Q_\bullet, \delta)$ *ist ein Komplex mit Homologie* $H_0 Q = R$ *und* $H_i Q = 0$ *für* $i \geq 1$.

*(ii)* $P_i \underset{R}{\otimes} P_j$ *ist ein $R[G]$-Modul bezüglich der Diagonaloperation von $G$, die Operation ist definiert als $g \cdot (x \otimes y) := gx \otimes gy$. Alle $P_i \underset{R}{\otimes} P_j$ sind auf diese Weise projektive $R[G]$-Moduln und $(Q_\bullet, \delta)$ wird so zu einer projektiven Auflösung des $R[G]$-Moduls $R$.*

*Beweis.* (i) Dies folgt unmittelbar aus Proposition 2.2 und der Tatsache, dass dass $P_\bullet$ exakt ist.

(ii) Die $R[G]$-Modulaxiome ergeben sich offensichtlich aus denen von $P_i$ und $P_j$.
Für die Projektivität zeigen wir ganz allgemein, dass für je zwei projektive $R[G]$-Moduln $P$ und $X$ der $R[G]$-Modul $P \underset{R}{\otimes} X$ ebenfalls projektiv ist. Da $P$ projektiv ist, beschränken wir uns auf den Fall $P = R[G]$. Sei außerdem $X^\natural$ der $X$ unterliegende $R$-Modul, da $R = R[1]$ ein Unterring von $R[G]$ ist. Da $X$ projektiv als $R[G]$-Modul ist, ist auch $X^\natural$ projektiv als $R$-Modul. Wir betrachten den durch Skalarerweiterung entstehenden $R[G]$-Modul $R[G] \underset{R}{\otimes} X$ und definieren die folgende $R[G]$-lineare Abbildung betrachten

$$R[G] \underset{R}{\otimes} X^\natural \to R[G] \underset{R}{\otimes} X, \quad g \otimes x \mapsto g(1 \otimes x) = g \otimes gx$$

Diese ist offensichtlich invers zu der Abbildung

$$R[G] \underset{R}{\otimes} X \to R[G] \underset{R}{\otimes} X^\natural, \quad g \otimes x \mapsto g \otimes (g^{-1}x)$$

und damit bijektiv. Somit sind $R[G] \underset{R}{\otimes} X$ und $R[G] \underset{R}{\otimes} X^\natural$ als $R[G]$-Moduln isomorph zueinander. Nun ist aber $X^\natural$ ein projektiver $R$-Modul und damit auch $R[G] \underset{R}{\otimes} X^\natural$ ein projektiver $R[G]$-Modul. Damit ist die Behauptung gezeigt.
Es verbleibt noch, die $R[G]$-Linearität von $\delta$ nachzurechnen. Seien dafür $x \in P_i$, $y \in P_j$ und $g \in R[G]$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} g\delta_n(x \otimes y) &= g(d_i x \otimes y + (-1)^i x \otimes d_j y) = g(d_i x \otimes y) + g((-1)^i x \otimes d_j y) \\ &= g d_i x \otimes gy + g(-1)^i x \otimes g d_j y = d_i gx \otimes gy + (-1)^i gx \otimes d_j gy \\ &= \delta_n(gx \otimes gy) = \delta_n(g(x \otimes y)) \end{aligned}$$

□

Da wir jetzt wissen, dass $(Q_\bullet, \delta)$, wie oben definiert, eine projektive Auflösung von $R$ ist, betrachten wir die Abbildung

$$\cup : Hom_{R[G]}(P_i, R) \times Hom_{R[G]}(P_j, R) \to Hom_{R[G]}(Q_{i+j}, R)$$

mit

$$(f, g) \mapsto f \cup g, \text{ definiert durch } f \cup g : Q_{i+j} \overset{can.}{\twoheadrightarrow} P_i \underset{R}{\otimes} P_j \xrightarrow{(-1)^{ij} f \otimes g} R \underset{R}{\otimes} R \cong R.$$

Durch Übergang zur Kohomologie wird $H^*(G; R)$ damit zu einem graduierten Ring, wie das nachfolgende Lemma besagt.

**Lemma 4.3.** (vgl. [Bro82], Kapitel 5.3) *Die obige Abbildung induziert eine wohldefinierte Abbildung*

$$\cup : H^i(G, R) \times H^j(G, R) \to H^{i+j}(G, R),$$

*das sogenannte "Cup-Produkt", welches $H^*(G, R)$ zu einem graduierten Ring macht. Des Weiteren ist das Cup-Produkt antikommutativ, das heißt $a \cup b = (-1)^{ij} b \cup a$, falls $a \in H^i(G, R)$ und $b \in H^j(G, R)$.*

*Beweis.* Um die Aussage zu beweisen, wollen wir zunächst einmal zeigen, dass für $a \in H^i(G,R) = H^i Hom_{R[G]}(P_\bullet, R)$ repräsentiert durch $f$ und $b \in H^j(G,R) = H^j Hom_{R[G]}(P_\bullet, R)$ repräsentiert durch $g$ das Element $f \cup g$ wieder ein $(i+j)$-Kozykel in $Hom_{R[G]}(Q_\bullet, R)$ ist, das heißt, dass

$$f \cup g \in ker(Hom_{R[G]}(\delta_{i+j+1}, R) : Hom_{R[G]}(Q_{i+j}, R) \to Hom_{R[G]}(Q_{i+j+1}, R)).$$

Es gilt für $x \in P_{i+1}$ und $y \in P_j$ wegen $f \circ d_{i+1} = 0$:

$$\begin{aligned} Hom_{R[G]}(\delta_{i+j+1}, R)(f \cup g)(x \otimes y) &= (f \cup g) \circ \delta_{i+j+1}(x \otimes y) \\ &= (f \cup g)(d_{i+1}x \otimes y + (-1)^{i+1} x \otimes d_j y) \\ &= (f \cup g)(d_{i+1}x \otimes y) + (f \cup g)((-1)^{i+1} x \otimes d_j y) \\ &= (-1)^{ij}(f \circ d_{i+1})(x) \otimes g(y) + (-1)^{ij}(f \otimes g) \circ can((-1)^{i+1} x \otimes d_j y) \\ &= 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

da $x \otimes d_j y \in P_{i+1} \otimes P_{j-1}$ unter *can* auf Null abgebildet wird. Ebenso behandelt man den Fall $x \in P_i, y \in P_{j+1}$.

Wir setzen nun also

$$a \cup b := (\text{Klasse von } f \cup g) \in H^{i+j} Hom_{R[G]}(Q_\bullet, R) = H^{i+j}(G,R)$$

und zeigen die Wohldefiniertheit des Cup-Produkts. Sei dazu $a \in H^i(G,R) = H^i Hom_{R[G]}(P_\bullet, R)$ repräsentiert durch $f_1$ sowie $f_2$ und $b \in H^j(G,R) = H^j Hom_{R[G]}(P_\bullet, R)$ repräsentiert durch $g_1$ und $g_2$. Dann gibt es $h \in Hom_{R[G]}(P_{i-1}, R), h' \in Hom_{R[G]}(P_{j-1}, R)$ mit $f_1 - f_2 = h \circ d_i$ und $g_1 - g_2 = h' \circ d_j$. Für $x \in P_i, y \in P_j$ gilt dann wie oben

$$(-1)^{ij} h d_i x \otimes g_2 y = (h \cup g_2)\delta_{i+j}(x \otimes y), \quad (-1)^{ij} f_2 x \otimes h' d_j y = (-1)^i (f_2 \cup h')\delta_{i+j}(x \otimes y)$$

$$\text{und } (-1)^{ij} h d_i x \otimes h' d_j y = (h \cup h' d_j)\delta_{i+j}(x \otimes y) \text{ und daher}$$

$$\begin{aligned} (f_1 \cup g_1)(x \otimes y) &= (-1)^{ij} f_1 x \otimes g_1 y \\ &= (-1)^{ij}(f_2 x \otimes g_2 y + h d_i x \otimes g_2 y + f_2 x \otimes h' d_j y + h d_i x \otimes h' d_j y) \\ &= (f_2 \cup g_2)(x \otimes y) + [h \cup g_2 + (-1)^i (f_2 \cup h') + (h \cup h' d_j)] \circ \delta_{i+j}(x \otimes y), \end{aligned}$$

weshalb $f_1 \cup g_1$ und $f_2 \cup g_2$ dieselbe Klasse repräsentieren.

Nun müssen wir noch die einzelnen Ringaxiome für das Cup-Produkt nachrechnen.

(i) *Assoziativität:* Seien dazu $a \in H^i(G,R) = H^i Hom_{R[G]}(P_\bullet, R)$, $b \in H^j(G,R) = H^j Hom_{R[G]}(P_\bullet, R)$ und $c \in H^i(G,R) = H^k Hom_{R[G]}(P_\bullet, R)$ repräsentiert durch $f$, $g$ respektive $h$. Dann gilt für alle $x \in P_i, y \in P_j$ und $z \in P_k$:

$$\begin{aligned} ((f \cup g) \cup h)(x \otimes y \otimes z) &= (-1)^{(i+j)k}(f \cup g)(x \otimes y) \otimes h(z) \\ &= (-1)^{(i+j)k}(-1)^{ij} f(x) \otimes g(y) \otimes h(z) \\ &= (-1)^{jk+ij+ik} f(x) \otimes g(y) \otimes h(z) \\ &= (-1)^{i(j+k)} f(x) \otimes (-1)^{jk} g(y) \otimes h(z) \\ &= (-1)^{i(j+k)} f(x) \otimes (g \cup h)(y \otimes z) \\ &= (f \cup (g \cup h))(x \otimes y \otimes z). \end{aligned}$$

Folglich gilt, dass $(f \cup g) \cup h = f \cup (g \cup h)$ in $H^{i+j+k} Hom_{R[G]}(Q_\bullet, R)$.

(ii) *1. Distributivgesetz:* Seien $a \in H^i(G,R)$ repräsentiert durch $f$, $b_1, b_2 \in H^j(G,R)$ repräsentiert durch $g_1$ bzw. $g_2$. Sei weiter $x \in P_i$ und $y \in P_j$, dann gilt:

$$\begin{aligned}(f \cup (g_1+g_2))(x \otimes y) &= (-1)^{ij} f(x) \otimes (g_1+g_2)(y) \\ &= (-1)^{ij} f(x) \otimes (g_1(y)+g_2(y)) \\ &= (-1)^{ij} f(x) \otimes g_1(y) + (-1)^{ij} f(x) \otimes g_2(y) \\ &= f \cup g_1(x \otimes y) + f \cup g_2(x \otimes y) \\ &= (f \cup g_1 + f \cup g_1)(x \otimes y)\end{aligned}$$

Damit gilt, dass $f \cup (g_1+g_2) = f \cup g_1 + f \cup g_2$ in $H^{i+j} Hom_{R[G]}(Q_\bullet, R)$.

(iii) *2. Distributivgesetz:* Seien $a_1, a_2 \in H^i(G,R)$ repräsentiert durch $f_1$ bzw. $f_2$ und $b \in H^j(G,R)$ repräsentiert durch $g$. Sei weiter $x \in P_i$ und $y \in P_j$, dann gilt:

$$\begin{aligned}((f_1+f_2) \cup g)(x \otimes y) &= (-1)^{ij} (f_1+f_2)(x) \otimes (f)(y) \\ &= (-1)^{ij} (f_1(x)+f_2(x)) \otimes f(y) \\ &= (-1)^{ij} f_1(x) \otimes g(y) + (-1)^{ij} f_2(x) \otimes g(y) \\ &= f_1 \cup g(x \otimes y) + f_2 \cup g(x \otimes y) \\ &= (f_1 \cup g + f_2 \cup g)(x \otimes y)\end{aligned}$$

Damit gilt, dass $(f_1+f_2) \cup g = f_1 \cup g + f_2 \cup g$ in $H^{i+j} Hom_{R[G]}(Q_\bullet, R)$.

(iv) *Einselement:* Sei $1 \in H^0(G,R) = R$ (nach Beispiel 3.1) der konstante Eins-Kozykel und $a \in H^i(G,R) = H^i Hom_{R[G]}(P_\bullet, R)$ repräsentiert durch $f$. Dann gilt

$$(f \cup 1)(x) = (-1)^0 (f \otimes 1)(x) = f(x) \otimes 1 = f(x)$$

und

$$(1 \cup f)(x) = (-1)^0 (1 \otimes f)(x) = 1 \otimes f(x) = f(x)$$

für $x \in P_i$. Damit gilt

$$1 \cup f = f \text{ und } f \cup 1 = f$$

und der konstante Eins-Kozykel ist das Einselement in $H^*(G,R)$.

(v) *Antikommutativität:* Die Eigenschaft der Antikommutativität des Cup-Produktes lässt sich nicht so direkt nachrechnen, wie die anderen Ringaxiome. Dazu betrachten wir den Komplexhomomorphismus $\tau : Q_\bullet \to Q_\bullet$, mit $\tau(x \otimes y) := (-1)^{ij} y \otimes x$, falls $x \in P_i, y \in P_j$. Nun ist $\tau$ aber schon ein Isomorphismus von Komplexen, da die Abbildung selbstinvers ist. Des Weiteren kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} Q_\bullet & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 \\ \big\downarrow \tau & & \big\downarrow id_R & & \\ Q_\bullet & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

in allen Rechtecken, da

$$\begin{aligned}\tau(\delta_n(x\otimes y)) &= \tau(d_i(x)\otimes y + (-1)^i x\otimes d_j(y))\\ &= (-1)^{(i-1)j} y\otimes d_i(x) + (-1)^{i(j-1)} d_j(y)\otimes(-1)^i x\\ &= (-1)^{ij} d_j(y)\otimes x + (-1)^j(-1)^{ij} y\otimes d_i(x)\\ &= \delta_n((-1)^{ij} y\otimes x)\\ &= \delta_n(\tau(x\otimes y)) \qquad \forall n\geq 1\end{aligned}$$

und $\tau$ auf $Q_0$ die Identität ist. Dann kommutiert auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Hom_{R[G]}(P_\bullet,R)\times Hom_{R[G]}(P_\bullet,R) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d] & Hom_{R[G]}(P_\bullet,R) \arrow[r] \arrow[d, "Hom_{R[G]}(\tau,R)"] & 0\\ Hom_{R[G]}(P_\bullet,R)\times Hom_{R[G]}(P_\bullet,R) \arrow[r, "\cup"] & Hom_{R[G]}(Q_\bullet,R) \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

wenn links analog $(f,g)\mapsto(-1)^{ij}(g,f)$ angewendet wird, weil

$$\begin{aligned}Hom_{R[G]}(\tau,R)(f\cup g)(x\otimes y) &= (f\cup g)(\tau(x\otimes y))\\ &= (-1)^{ij}(-1)^{ij} f(y)\otimes g(x)\\ &= (-1)^{ij}(-1)^{ij} g(x)\otimes f(y)\\ &= ((-1)^{ij} g\cup f)(x\otimes y).\end{aligned}$$

Nun ist aber $\tau$ nach Lemma 2.3 homotop zu $id_{Q_\bullet}$. Daher ist auch $Hom_{R[G]}(\tau,R)$ bei Übergang zur Kohomologie die Identität, da je zwei homotope Homomorphismen von Komplexen dieselben Homomorphismen auf den Kohomologiegruppen induzieren. Folglich ist das Cup-Produkt antikommutativ und es gilt $a\cup b = (-1)^{ij} b\cup a$ für $a\in H^i(G,R)$ und $b\in H^j(G,R)$.

□

Nachdem wir nun wissen, dass $H^*(G,R)$ ein graduierter Ring ist, wollen wir weitere Beispiele betrachten. Für das nachfolgende Beispiel müssen wir zunächst den Begriff der äußeren Algebra einführen (Vgl. [Fis14], Kapitel 6.3). Sei dazu im Folgenden $R=k$ ein Körper und $V$ ein $k$-Vektorraum. Dann definiert man

$$T^n(V) := \underbrace{V \underset{k}{\otimes} \dots \underset{k}{\otimes} V}_{n-mal}$$

und den Untervektorraum

$$A^n(V) := span\{v_1\otimes\dots\otimes v_n \mid \exists i,j\in\{1,\dots n\} \text{ mit } i\neq j \text{ und } v_i=v_j\}.$$

Des weiteren definiert man

$$T(V)=\bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(V)$$

und das darin enthaltene Ideal

$$A(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^n(V).$$

Die äußere Algebra ist dann definiert als $\Lambda(V) = T(V)/A(V)$. Als Vektorraum und damit auch als graduierte $k$-Algebra ist dies gleich

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda^n(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(V)/A^n(V),$$

mit $k$-Untervektorräumen $\Lambda^n(V) = T^n(V)/A^n(V)$. Ist $\dim(V) = s$, dann gilt für die Dimension der Untervektorräume $\dim(\Lambda^n(V)) = \binom{s}{n}$.

**Beispiel 4.4.** Da wir bereits den Fall des Kohomologieringes betrachtet haben, in dem $R$ ein Körper ist mit Charakteristik teilerfremd zur Ordnung von $G$, wollen wir uns nun Beispiele anschauen, bei denen die Charakteristik von $R$ die Gruppenordnung $|G|$ teilt. Wir wollen also den Fall betrachten, dass $R = k$ ein Körper mit Charakteristik $p > 0$ und $G = \mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ eine zyklische $p$-Gruppe ist. Dafür zeigen wir zunächst einmal, dass die Gruppenalgebra von $G = \mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ gleich $k[x]/(x^{p^e} - 1)$ ist.

Jedes Element $f \in k[\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}] = Abb(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}, k)$ lässt sich, wie bereits oben beschrieben, eindeutig als Linearkombination der charakteristischen Funktionen

$$\sum_{g \in \mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}} r_g \mathbb{1}_g \text{ mit } r_g \in k$$

darstellen. Nun sei $h$ ein Erzeuger in $\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$, repräsentativ wählen wir die Restklasse der Eins, $h = 1 + p^e\mathbb{Z}$, und wir betrachten die folgende charakteristische Funktion

$$\mathbb{1}_{1+p^e\mathbb{Z}} = g \mapsto \begin{cases} 1 \in k, & g = 1 + p^e\mathbb{Z} \\ 0 \in k, & sonst \end{cases}.$$

Sei nun $\varphi$ der Einsetzungshomomorphismus vom Polynomring über $k$ in die Gruppenalgebra

$$\varphi : k[x] \to k[\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}],\ x \mapsto \mathbb{1}_{1+p^e\mathbb{Z}}.$$

Dies ist ein $k$-linearer Ringhomomorphismus und für ein Polynom $F(x)$ gilt

$$F(x) \overset{\varphi}{\mapsto} F(\mathbb{1}_{1+p^e\mathbb{Z}}).$$

Damit ist $\varphi$ aber auch surjektiv, da $\mathbb{1}_{1+p^e\mathbb{Z}}$ ein Erzeuger ist und

$$x^n \mapsto (\mathbb{1}_{1+p^e\mathbb{Z}})^n = \mathbb{1}_{1+p^e\mathbb{Z}} \cdot \ldots \cdot \mathbb{1}_{1+p^e\mathbb{Z}} = \mathbb{1}_{(1+p^e\mathbb{Z})^n} = \mathbb{1}_{n+p^e\mathbb{Z}}$$

und $n + p^e\mathbb{Z} = g \quad \forall g \in \mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ für geeignete $n \in \mathbb{N}$. Des Weiteren gilt, dass

$$\varphi(x^{p^e}) = \mathbb{1}_{p^e+p^e\mathbb{Z}} = \mathbb{1}_{0+p^e\mathbb{Z}} = 1_{k[G]} = \varphi(1_{k[x]})$$

und daraus folgt, dass $x^{p^e} - 1$ in $ker(\varphi)$ liegt und damit induziert $\varphi$ einen $k$-linearen surjektiven Ringhomorphismus

$$k[x]/(x^{p^e} - 1) \twoheadrightarrow k[G],\ F + (x^{p^e} - 1) \mapsto \varphi(F) = F(\mathbb{1}_{1+p^e\mathbb{Z}}).$$

Dieser ist aber aus Dimensionsgründen schon bijektiv, da

$$dim(k[G]) = |G| = p^e \ \text{ und } \ dim(k[x]/(x^{p^e} - 1)) = p^e$$

nach Euklidischem Algorithmus, folglich ist $k[\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}] \cong k[x]/(x^{p^e} - 1)$. Da $\operatorname{char}(k) = p$ ist, gilt $x^{p^e} - 1 = (x-1)^{p^e}$ und somit lässt sich durch Substitution die Gruppenalgebra in der anschaulicheren Form $k[y]/(y^{p^e})$ darstellen.

Mit diesem Wissen lässt sich nun für Körper $k$ der Charakteristik $p$ und zyklische $p$-Gruppen der Form $G = \mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ der Kohomologiering explizit berechnen. Nach [Iyn04] Proposition 7.3 und [Ben91] Proposition 3.5.5 hat $H^*(G, k)$ dann die folgende Struktur:

(i) Falls $p^e = 2$ ist, so ist $H^*(G, k) \cong k[x]$, wobei $x$ Grad 1 hat.

(ii) Falls $p^e > 2$ ist, so ist $H^*(G, k) \cong k[x, y]/(x^2) \cong \Lambda(x) \underset{k}{\otimes} k[y]$, wobei $x$ Grad 1 und $y$ Grad 2 hat. Hierbei bezeichnet $\Lambda(x)$ die äußere Algebra des eindimensionalen Vektorraums $k \cdot x$.

Außerdem bedeutet $\deg(x) = 2$ für den Polynomring $k[x] = \bigoplus_{i \geq 0} kx^i$, dass die Graduierung neu nummeriert wird. Falls $x$ Grad 2 hat, erhalten wir

$$k[x] = \bigoplus_{i \geq 0} R_i \ \text{ mit } \ R_i = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \text{ ungerade} \\ kx^{i/2}, & \text{falls } i \text{ gerade.} \end{cases}$$

Mit Hilfe der sogenannten Künneth-Formel (vgl. [Iyn04] 6.5) lässt sich dieses Resultat nun auf jede endliche abelsche Gruppe anwenden und den Kohomologiering berechnen. Sind $G_1$ und $G_2$ Gruppen und $R = [G_1]$ und $S = [G_2]$ die jeweilige Gruppenalgebra, so besagt die Künneth-Formel, dass man einen Homomorphismus graduierter $k$-Algebren

$$H^*(G_1, k) \underset{k}{\otimes} H^*(G_2, k) \to H^*(G_1 \times G_2, k)$$

erhält. Dieser ist bijektiv, wenn $G_1$ und $G_2$ endlich, oder endlich erzeugt und abelsch sind, also

$$H^*(G_1 \times G_2, k) \cong H^*(G_1, k) \underset{k}{\otimes} H^*(G_2, k).$$

Zunächst aber wollen wir damit unser Resultat auf den Fall eines Körpers $k$ mit $\operatorname{char}(k) = p$ und einer abelschen $p$-Gruppe der Form $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$ (sogenannte elementar abelsche $p$-Gruppen, wie wir später definieren werden) verallgemeinern. Unter diesen Voraussetzungen gilt dann (vgl. [Ben91], Proposition 3.5.7):

(i) Falls $p = 2$ ist, so ist $H^*(G, k) \cong k[x_1, ..., x_r]$ eine polynomielle $k$-Algebra mit $\deg(x_i) = 1$.

(ii) Falls $p > 2$ ist, so ist $H^*(G, k) \cong \Lambda(x_1, ..., x_r) \underset{k}{\otimes} k[y_1, ..., y_r]$ das Tensorprodukt aus der äußeren Algebra des von $\{x_1, ..., x_r\}$ erzeugten Vektorraums und eines Polynomrings mit $\deg(x_i) = 1$ und $\deg(y_j) = 2$.

Dies folgt unmittelbar aus der Künneth-Formel und dem vorherigen Beispiel zyklischer $p$-Gruppen.

Sei abschließend also $G$ eine endliche abelsche Gruppe und $k$ ein Körper mit Charakteristik $p$. Nach dem Struktursatz für endliche abelsche Gruppen existieren $s \in \mathbb{N}$ und $e_1, ..., e_s \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, so dass

$$G \cong \mathbb{Z}/p^{e_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p^{e_s}\mathbb{Z} \times G',$$

wobei $G'$ eine endliche abelsche Gruppe ist mit Ordnung teilerfremd zu $p$. Mit der Künneth-Formel erhalten wir dann

$$H^*(G, k) \cong H^*(\mathbb{Z}/p^{e_1}\mathbb{Z}, k) \underset{k}{\otimes} ... \underset{k}{\otimes} H^*(\mathbb{Z}/p^{e_s}\mathbb{Z}, k) \underset{k}{\otimes} H^*(G', k),$$

wobei der letzte Teil $H^*(G', k) = k$ nach Beispiel 3.1 durch Tensorierung mit $k$ entfällt. $H^*(\mathbb{Z}/p^{e_i}\mathbb{Z}, k)$ lässt sich jeweils wie oben berechnen.

## 4.1 Funktorialität

Nachdem wir das Cup-Produkt und die Ringstruktur des Kohomoligieringes untersucht haben, wollen wir nun Kohomologieringe zu verschiedenen Gruppen und Abbildungen zwischen diesen betrachten. Seien dazu also $G$ und $H$ zwei endliche Gruppen und sei $\Phi : H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus von $H$ nach $G$. Dann induziert dieser einen Ringhomomorphismus zwischen den Gruppenalgebren

$$\varphi : R[H] \to R[G], \sum_{h \in H} r_h h \mapsto \sum_{h \in H} r_h \varphi(h).$$

Auf diese Weise wird jeder $R[G]$-Modul auf natürliche Weise zu einem $R[H]$-Modul mittels Skalarrestriktion.

Sei außerdem $P_\bullet \to R \to 0$ eine projektive Auflösung von $R$ über $R[G]$ und $S_\bullet \to R \to 0$ eine projektive Auflösung von $R$ über $R[H]$. Da $P_\bullet \to R \to 0$ exakt ist, existiert nach Proposition 1 ein bis auf Homotopie eindeutiger Morphismus $f : S_\bullet \to P_\bullet$ von Komplexen von $R[H]$-Moduln, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} S_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"] & R \arrow[r] \arrow[d, "id_R"] & 0 \\ P_\bullet \arrow[r] & R \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutiert (vgl. Lemma 2.3). Dies induziert durch Anwenden des Hom-Funktors wiederum einen Homomorphismus von Komplexen der Form

$$Hom_{R[G]}(P_\bullet, R) \hookrightarrow Hom_{R[H]}(P_\bullet, R) \xrightarrow{Hom_{R[H]}(f,R)} Hom_{R[H]}(S_\bullet, R)$$

und damit, bei Übergang zur Homologie, Homomorphismen zwischen den Kohomologiegruppen $H^i(G,R) \to H^i(H,R)$, für jedes $i \geq 0$. Die Eigenschaften dieser Abbildungen werden im nachfolgenden Lemma behandelt.

**Lemma 4.5.** *Diese Homomorphismen sind bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl der Auflösungen $P_\bullet, S_\bullet$ und des Morphismus $f$. Die $R$-lineare Abbildung $H^*(G,R) \to H^*(H,R)$ ist ein Ringhomomorphismus.*

*Beweis.* Sind $P_\bullet \to R \to 0$ und $P'_\bullet \to R \to 0$ zwei projektive Auflösungen von $R$ über $R[G]$, beziehungsweise $S_\bullet \to R \to 0$ und $S'_\bullet \to R \to 0$ zwei projektive Auflösungen von $R$ über $R[H]$, so sind diese homotopieäquivalent. Sind außerdem $f, f' : S_\bullet \to P_\bullet$ zwei Morphismen, die auf $R$ die Identität induzieren, so sind diese homotop (vgl. Lemma 2.3). Damit sind Homomorphismen $H^i(G,R) \to H^i(H,R)$ bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl der Auflösungen sowie von der Wahl des Morphismus $f$.

Es verbleibt noch nachzurechnen, dass die oben definierte Abbildung $H^*(G,R) \to H^*(H,R)$ ein Ringhomomorphismus ist. Dazu betrachten wir folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^i Hom_{R[G]}(P_\bullet, R) \times H^j Hom_{R[G]}(P_\bullet, R) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d] & H^{i+j} Hom_{R[G]}(Q_\bullet, R) \arrow[d] \\ H^i Hom_{R[H]}(P_\bullet, R) \times H^j Hom_{R[H]}(P_\bullet, R) \arrow[d, "Hom_{R[H]}(f,R)"] & H^{i+j} Hom_{R[H]}(Q_\bullet, R) \arrow[d, "Hom_{R[H]}(f,R)"] \\ H^i Hom_{R[H]}(S_\bullet, R) \times H^j Hom_{R[H]}(S_\bullet, R) \arrow[r, "\cup"] & H^{i+j} Hom_{R[H]}(T_\bullet, R). \end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm kommutiert, da für $a \in H^i(G,R)$ und $b \in H^j(G,R)$ gilt, dass

$$(-1)^{ij}(a \circ f_i) \otimes (b \circ f_j) = (-1)^{ij}(a \otimes b) \circ (f_i \otimes f_j).$$

Außerdem induziert $f : P_\bullet \to S_\bullet$ einen Homomorphismus $Q_\bullet = P_\bullet \underset{R}{\otimes} P_\bullet \to T_\bullet = S_\bullet \underset{R}{\otimes} S_\bullet$ der auf $P_i \underset{R}{\otimes} P_j$ durch $f_i \otimes f_j$ gegeben ist und auf $R$ die Identität induziert. Aus der obigen Unabhängigkeitsaussage folgt dann, dass $H^*(G,R) \to H^*(H,R)$ ein Ringhomomorphismus ist, wie behauptet. $\square$

Ist $H \leq G$ eine Untergruppe und der obige Gruppenhomomorphismus $\varphi$ die Inklusion, so wird die Abbildung $H^*(G,R) \to H^*(H,R)$ als Restriktion $res_{G,H}$ bezeichnet. In diesem Fall gibt es auch Abbildungen in der umgekehrten Richtung, mit denen wir uns jetzt beschäftigen wollen. Wegen

$$R[G] = \bigoplus_{g \in H \backslash G} R[H] \cdot g$$

ist $R[G]$ frei als $R[H]$-Modul vom Rang $(G : H)$ und damit ist auch jeder projektive $R[G]$-Modul als $R[H]$-Modul projektiv, da dieser als direkte Summe mit einem weiteren Modul isomorph zu einem Modul der Form $(R[H])^{(I)}$ ist, für geeignetes $I$.

Sei also $H \leq G$ und $P_\bullet \to R \to 0$ eine projektive Auflösung über $R[G]$. Dann betrachten wir die Abbildung

$$Hom_{R[H]}(P_\bullet, R) \to Hom_{R[G]}(P_\bullet, R),\ f \mapsto (x \mapsto \sum_{g \in G/H} gf(g^{-1}x)).$$

Diese ist ein wohldefinierter Morphismus von Komplexen, da $gf(g^{-1}x)$ aufgrund der $R[H]$-Linearität von $f$ lediglich von der Linksnebenklasse und nicht von der Wahl des Repräsentanten abhängt. Seien nämlich $g, \tilde{g} \in G$ mit $gH = \tilde{g}H$, dann gilt $\tilde{g} = gh$ für ein $h \in H$ und daher

$$gf(g^{-1}x) = gf(h\tilde{g}^{-1}x) = ghf(\tilde{g}^{-1}x) = \tilde{g}f(\tilde{g}^{-1}x).$$

Seien also $\{g_1, ..., g_r\} \subseteq G$ und $\{\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_r\} \subseteq G$ zwei Repräsentantensysteme von $G/H$, so ist

$$\sum_{i=1}^{r} g_i f(g_i^{-1}x) = \sum_{j=1}^{r} \tilde{g}_j f(\tilde{g}_j^{-1}x).$$

Die $R[G]$-Linearität der rechts stehenden Abbildung lässt sich auf ähnliche Weise nachrechnen. Dadurch erhält man wieder durch Übergang zur Homologie die $R$-lineare Abbildung $tr_{H,G} : H^*(H, R) \to H^*(G, R)$, die sogenannte Transferabbildung.

*Bemerkung.* (i) Die Transferabbildung wird auch Korestriktion genannt und in der Literatur häufig mit $cor$, $cor_G^H$ oder $Kor$ abgekürzt.

(ii) Die Abbildung $tr_{H,G}$ ist im Allgemeinen kein Ringhomomorphismus. Einige weitere Eigenschaften der Restriktion und Transferabbildung werden wir im nachfolgenden Kapitel behandeln.

# 5 Grundlegende Eigenschaften

Wir haben uns bisher damit beschäftigt, die wesentlichen algebraischen Strukturen des Kohomologierings einzuführen. Nun wollen wir einige wichtige Eigenschaften von $H^*(G, R)$ betrachten, wie etwa den Satz von Evens. Vorbereitend dazu benötigt man zunächst allerdings einige grundlegende Propositionen zum Verhalten des Cup-Produktes sowie der Restriktions- und Transferabbildung, die wir hier aber nicht beweisen werden. Für die Beweise verwendet man die sogenannte Dimensionsverschiebung, die besagt, dass für eine allgemeinere Form des Kohomologieringes $H^q(G, M) \cong H^0(G, M^q)$ mit einem geeigneten $R[G]$-Modul $M^q$ gilt. Dann werden die jeweiligen Eigenschaften für $H^0(G, M)$ mit beliebigem $R[G]$-Modul $M$ nachgewiesen. Dafür wird auf das jeweilige Resultat im Werk [Neu11] verwiesen.

**Proposition 5.1.** *Sei $\alpha \in H^i(G, R)$ mit $i > 0$, dann gilt $|G| \cdot \alpha = 0$, folglich ist*

$$|G| \cdot H^i(G, R) = 0.$$

*Das bedeutet, dass $H^i(G, R)$ ist ein $\mathbb{Z}$-Torsionsmodul, da jedes Element von $|G|$ annulliert wird.*

*Beweis.* Der Beweis befindet sich in [Neu11], Satz I.3.16. □

**Proposition 5.2.** *Sei $H \leq G$ eine Untergruppe. Dann gilt für $\alpha \in H^n(G, R)$ und $\beta \in H^m(G, R)$, dass*

$$res_{G,H}(\alpha \cup \beta) = res_{G,H}(\alpha) \cup res_{G,H}(\beta) \in H^{n+m}(H, R).$$

*Für $\alpha \in H^n(G, R)$ und $\beta \in H^m(H, R)$ gilt*

$$tr_{H,G}(res_{G,H}(\alpha) \cup \beta) = \alpha \cup tr_{H,G}(\beta) \in H^{n+m}(G, R).$$

*Beweis.* Vergleiche [Neu11], Satz I.5.4. □

**Proposition 5.3.** *Die Verknüpfung der beiden Abbildungen*

$$tr_{H,G} : H^*(H, R) \to H^*(G, R) \quad und \quad res_{G,H} : H^*(G, R) \to H^*(H, R)$$

*ergibt*

$$tr_{H,G} \circ res_{G,H} = (G : H) \cdot id \ : H^*(G, R) \to H^*(G, R)$$

*Beweis.* Vergleiche [Neu11], Satz I.4.14. □

Nun kommen wir zu einem fundamentalen Ergebnis der Kohomologietheorie, dem Satz von Evens. Für den Beweis nutzt man zunächst eine Reduktion auf den Fall einer $p$-Gruppe. Wir werden die Aussage zunächst für $p$-Sylowuntergruppen von $G$ nachweisen und dann die weiteren Schritte im Beweis andeuten, aber nicht weiter ausarbeiten.

**Satz 5.4.** ***(Satz von Evens)*** (vgl. [Ben98], Theorem 4.2.1)
*Ist $R$ noethersch, so ist auch $H^*(G,R)$ noethersch. Ist $H^*(G,R)$ noethersch, so wird er als $R$-Algebra von endlich vielen homogenen Elementen erzeugt.*

*Bemerkung.* (i) Es gilt sogar die folgende allgemeinere Aussage für jeden graduierten Ring $H = \bigoplus_{n\geq 0} H^n$: Falls $H$ noethersch ist, dann ist auch $H^0$ noethersch und $H$ ist als Algebra endlich erzeugt über $H^0$ durch homogene Elemente.

(ii) Wenn $R$ nicht noethersch ist, so ist die zweite Aussage im Allgemeinen falsch und $H^*(G,R)$ nicht notwendigerweise endlich erzeugt über $R$.

*Beweis.* Wir beweisen zunächst den zweiten Teil des Satzes. Sei also $H^*(G,R) = \bigoplus_{i\geq 0} H^i(G,R)$ ein noetherscher Ring. Dann ist $H^0(G,R)$ wegen der Graduierung ein Quotientenring von $H^*(G,R)$, das heißt es existiert ein surjektiver Ringhomomorphismus $\varphi : H^*(G,R) \twoheadrightarrow H^0(G,R)$. Damit ist auch $H^0(G,R)$ noethersch, denn sei $(I_n)_n$ eine aufsteigende Kette von Idealen in $H^0$. Dann ist auch $\varphi^{-1}(I_n)$ ein Ideal in $H^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(\varphi^{-1}(I_n))_n$ ist eine aufsteigende Kette von Idealen. Nun ist $H^*$ aber noethersch und somit wird $(\varphi^{-1}(I_n))_n$ als aufsteigende Kette von Idealen stationär. Also wird $(I_n)_n$ stationär in $H^0$ wegen $\varphi(\varphi^{-1}(I_n)) = I_n$, da $\varphi$ surjektiv ist.
Nach Beispiel 3.1 wissen wir, dass $H^0(G,R) = R$ gilt und deswegen ist $H^*(G,R)$ eine $R$-Algebra. Nun betrachten wir die Menge

$$H^+(G,R) := \bigoplus_{i>0} H^i(G,R).$$

Dies ist, ebenfalls aufgrund der Graduierung, ein Ideal in $H^*(G,R)$ und somit endlich erzeugt. Jeder dieser Erzeuger ist eine endliche Summe von homogenen Elementen und deswegen ist auch $H^+$ als Ideal erzeugt durch homogene Elemente, zum Beispiel $a_1, ..., a_n$. Dann ist aber auch $H^*$ durch die Elemente $1, a_1, ..., a_n$ endlich erzeugt als Ring über $H^0$.

Nun kommen wir zum ersten Teil des Satzes, der eigentlichen Aussage des Satzes von Evens. Dafür zeigen wir, dass $H^*(G,R)$ als Modul über sich selbst noethersch ist. Wie bereits oben erwähnt, beschränken wir uns zunächst auf den Fall einer $p$-Sylowuntergruppe von $G$.
Dazu halten wir zunächst ein paar Ergebnisse fest und betrachten, wie bereits oben, das Ideal

$$H^+(G,R) := \bigoplus_{i>0} H^i(G,R).$$

Nach Proposition 5.1 gilt, dass $|G| \cdot \alpha = 0$ für alle $\alpha \in H^+(G,R)$ und damit, dass

$$H^+(G,R) = \bigoplus_{p||G|} H^+(G,R)_{(p)},$$

wobei $H^+(G,R)_{(p)}$ die Menge derjenigen Elemente von $H^+(G,R)$ bezeichnet, die von $p$ annulliert werden und $p$ in der Primfaktorzerlegung von $|G|$ enthalten ist. Sei $P \leq G$ eine $p$-Sylowuntergruppe. Dann sind die Abbildungen

$$res_{G,P} : H^*(G,R)_{(p)} \to H^*(P,R) \quad \text{und} \quad tr_{P,G} : H^*(P,R) \to H^*(G,R)_{(p)}$$

injektiv respektive surjektiv, da nach Proposition 5.2 gilt, dass

$$tr_{P,G} \circ res_{G,P} = (G:P) \cdot id_{H^*(G,R)_{(p)}}$$

und $(G:P)$ nicht durch $p$ teilbar ist. Folglich erhält man, dass

$$H^*(P,R) = H^*(G,R)_{(p)} \oplus T(R),$$

wobei

$$T(R) = ker(tr_{P,G} : H^*(P,R) \to H^*(G,R)_{(p)}).$$

Außerdem gilt

$$T(R) \cdot H^+(G,R)_{(p)} \subseteq T(R),$$

da man nach Proposition 5.2 erhält, dass

$$tr_{P,G}(\beta \cup res_{G,P}(\alpha)) = tr_{P,G}(\beta) \cup \alpha$$

und natürlich ist $H^+(G,R)_{(p)}$ unter dem Cup-Produkt abgeschlossen, also

$$H^+(G,R)_{(p)} \cdot H^+(G,R)_{(p)} \subseteq H^+(G,R)_{(p)}.$$

Sei nun also $A$ ein Ideal von $H^+(G,R)_{(p)}$, also ein Untermodul von $H^+(G,R)_{(p)}$ als Modul über sich selbst. Dann gilt

$$\begin{aligned} H^+(P,R)_{(p)} \cdot A &= (H^+(G,R)_{(p)} \oplus T(R)) \cdot A \\ &= H^+(G,R)_{(p)} \cdot A \oplus T(R) \cdot A \subseteq H^+(G,R)_{(p)} \oplus T(R). \end{aligned}$$

Es folgt also, dass, wenn $A$ ein echter Untermodul von $A'$ ist, auch $H^+(P,R)_{(p)} \cdot A$ ein echter Untermodul von $H^+(P,R)_{(p)} \cdot A'$ ist. Ist also $H^*(P,R)$ noethersch, so wird jede aufsteigende Folge von Idealen in $H^+(G,R)_{(p)}$ stationär. Das reduziert den Beweis des Satzes auf den Fall, dass $G = P$ eine $p$-Gruppe ist.
Im nächsten Schritt des Beweises wird eben diese Aussage für den Fall, dass $G = P$ eine $p$-Gruppe ist, gezeigt. Dies wird per Induktion nach der Ordnung von $P$ bewiesen. Der Induktionsanfang für $P = 1$, die einelementige Gruppe, ist die Aussage trivial, da nach Beispiel 3.1 gilt, dass $H^*(G,R) = R$ ist. Für den Fall $P > 1$ wird die Aussage mit Hilfe der sogenannten Hochschild-Serre-Spektralsequenz und dem Hilbertschen Basissatz induktiv auf den Fall $P = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ zurückgeführt. Für die Details verweisen wir auf [Ben98], Theorem 4.2.1. □

Nun wissen wir, dass $H^*(G,R)$ ein antikommutativer Ring ist, der über $R$ endlich erzeugt und noethersch ist, falls $R$ noethersch ist. Im Spezialfall $R=k$ ein Körper mit Charakteristik 2, ist $H^*(G,R)$ sogar eine kommutative $R$-Algebra. Dies motiviert die nachfolgende Definition. Sei also $R$ ein Körper, dann definieren wir die Menge

$$H^{\cdot}(G,R) := \begin{cases} H^*(G,R), & char(R)=2 \\ \bigoplus\limits_{n\geq 0} H^{2n}(G,R), & char(R)\neq 2 \end{cases}.$$

Dies ist ein Unterring von $H^*(G,R)$ wegen der Graduierung

$$\cup : H^{2i}(G,R) \times H^{2j}(G,R) \to H^{2(i+j)}(G,R), \forall i,j \in \mathbb{N}$$

und kommutativ auf Grund der Antikommutativität von $H^*$, da $a \cup b = (-1)^{2n*2m} b \cup a = b \cup a$ für alle $a \in H^{2n}$ und $b \in H^{2m}$, $n,m \in \mathbb{N}$. $H^{\cdot}(G,R)$ ist ebenfalls eine $R$-Algebra von endlichem Typ, wie das nachfolgende Korollar aus dem Satz von Evens zeigt.

**Korollar 5.5.** *Sei $R$ ein Köper. Dann ist $H^{\cdot}(G,R)$ eine kommutative $R$-Algebra von endlichem Typ. Insbesondere hat $H^{\cdot}(G,R)$ damit endliche Krulldimension.*

*Beweis.* Dass $H^{\cdot}(G,R)$ ein kommutativer Unterring von $H^*(G,R)$ ist, haben wir bereits oben diskutiert. Es bleibt also noch zu zeigen, dass es eine $R$-Algebra vom endlichem Typ ist. Betrachten wir dazu die endlichen vielen homogenen Erzeuger von $H^*$ über $R$, die nach dem Satz von Evens existieren, da $R$ ein Körper ist und damit insbesondere noethersch. Seien diese erzeugenden Elemente etwa

$$\begin{aligned} x_1,\dots,x_r &\quad \text{alle homogen von geradem Grad} \\ y_1,\dots,y_s &\quad \text{alle homogen von ungeradem Grad} \end{aligned}$$

und nun betrachten wir die Menge $\{x_1,\dots,x_r\} \cup \{y_i y_j \mid 1 \leq i,j \leq s\}$ von homogenen Elementen geraden Gerades. Diese bilden nun ein Erzeugendensystem von $H^{\cdot}(G,R)$ und damit ist es eine $R$-Algebra von endlichem Typ. Aus dem Satz der Noether-Normalisierung folgt, dass jede $k$-Algebra von endlichem Typ über einem Körper $k$ auch endliche Krulldimension hat. Folglich ist die Krulldimension von $H^{\cdot}(G,R)$ nach dem oben gezeigten auch endlich. □

Da wir nun wissen, dass $H^{\cdot}(G,R)$ endliche Krulldimension hat, wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, wie sich $dim(H^{\cdot}(G,R))$ genauer bestimmen lässt. Dies werden wir im nachfolgenden Kapitel genauer behandeln.

# 6 Satz von Quillen

Als abschließendes Resultat dieser Arbeit wollen wir einen Satz von Quillen betrachten. Dieser wurde bereits im Jahre 1971 bewiesen und trifft eine Aussage darüber, wie sich die Krulldimension von $H^{\cdot}(G, R)$ allein aus den Eigenschaften von $G$ bestimmen lässt. Für den Satz benötigen wir noch einige Definitionen und deren Eigenschaften, wie den Begriff der Poincaré-Reihe und den einer minimalen projektiven Auflösung. Letzteren werden wir zuerst betrachten.

## 6.1 Minimale Projektive Auflösungen

**Definition 6.1.** *Sei $M$ ein $R$-Modul. Eine projektive Hülle von $M$ ist ein projektiver $R$-Modul $P$ zusammen mit einer surjektiven $R$-linearen Abbildung $f : P \to M$, sodass gilt: Für jeden Untermodul $H \subsetneqq P$ von $P$ gilt $f(H) \subsetneqq M$. Das heißt, dass $f|_H : H \to M$ nicht länger surjektiv ist.*

*Anschaulich bedeutet dies, $P$ ist ein minimaler projektiver $R$-Modul, der $M$ als Quotienten hat.*

**Lemma 6.2.** *(i) Ist*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow h & & \downarrow id_M \\ Q & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

*ein kommutatives Diagramm $R$-linearer Abbildungen, sodass $f$ und $g$ beide projektive Hüllen von $M$ sind, so ist $h$ automatisch ein Isomorphismus.*

*(ii) Ist $R$ eine endlich dimensionale Algebra über einem Körper $k$ (zum Beispiel $R = k[G]$), dann besitzt jeder endlich erzeugte $R$-Modul $M$ eine projektive Hülle $P \xrightarrow{f} M$. Des weiteren gilt $dim_k(P) < \infty$.*

*Beweis.* (i) Es gilt, dass $g(h(P)) = f(P) = M$, da $f$ surjektiv ist und das Diagramm kommutiert. Damit ist auch $h(P) = Q$, da $g$ eine projektive Hülle von $M$ ist, also ist auch $h : P \to Q$ surjektiv.

Nun ist aber auch $Q$ projektiv, daher existiert eine $R$-lineare Abbildung $s : Q \to P$ mit $h \circ s = id_Q$. Damit ist $P$ darstellbar als direkt Summe

$$P = s(Q) \oplus ker(h) \quad \text{via} \quad x = \underbrace{x - s(h(x))}_{\in ker(h)} + \underbrace{s(h(x))}_{\in s(Q)}.$$

Aber es gilt $f(s(Q)) = g(h(s(Q))) = g(Q) = M$ und daher $s(Q) = P$, da $f$ projektive Hülle von $M$ ist. Folglich ist $\ker(h) = 0$ und $h : P \to Q$ injektiv, also insgesamt ein Isomorphismus.

(ii) Wähle $n \in \mathbb{N}$ und eine $R$-lineare Abbildung $f : R^n \to M$, so dass diese surjektiv ist. Dies existiert weil $M$ nach Voraussetzung endlich erzeugt ist. Nach Annahme gilt dann, dass $\dim_k(R^n) < \infty$. Wähle nun unter allen $R$-Untermoduln $P$ von $R^n$ mit $f(P) = M$ einen mit minimaler $k$-Dimension. Dann ist zu zeigen, dass $P$ projektiv ist: Zunächst einmal ist $R^n$ natürlich projektiv. Deswegen existiert eine $R$-linear Abbildung $t : R^n \to P$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "t"] & M \\ P \arrow[ur, "f|_P"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei $f\ |_P \colon P \twoheadrightarrow M$ surjektiv ist. Daher gilt $f(t(P)) = f(P) = M$ und somit ist $t(P) \subseteq P$ ein $R$-Untermodul, auf dem $f$ noch immer surjektiv ist. Wegen der Minimalität von $dim_k(P)$ ist aber $t(P) = P$. Folglich ist $t\ |_P \colon P \to P$ surjektiv und damit ist $t\ |_P$ bereits aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus. Damit gilt

$$P \oplus \ker(t) \cong R^n \quad \text{via} \quad (x, y) \mapsto (t\ |_P)^{-1}(x) + y.$$

Diese Abbildung ist bijektiv, da die Umkehrabbildung durch

$$x \mapsto (t(x), x - (t\ |_P)^{-1}(t(x))$$

gegeben ist. Folglich ist auch $P$ projektiv. Wegen der Minimalität von $\dim_k(P)$ ist $P$ bereits eine projektive Hülle des $R$-Moduls $M$.

□

*Bemerkung.* 1. Sind $P \xrightarrow{f} M$ und $Q \xrightarrow{g} M$ zwei projektive Hüllen von $M$, so existiert aufgrund der Projektivität von $P$ stets eine $R$-lineare Abbildung $h : P \to Q$, sodass

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & M \\ Q \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Nach Lemma 6.2 (i) ist $h$ ein Isomorphismus. In diesem Sinne sind projektive Hüllen, sofern sie existieren, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

2. Ist $P$ ein projektiver $R$-Modul, so ist offenbar $f = id_P : P \to P$ eine projektive Hülle von $P$. Insbesondere müssen projektive Hüllen keine freien $R$-Moduln sein.

**Definition 6.3.** *Eine projektive Auflösung*

$$\ldots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

*von $M$ heißt minimal, falls $P_i \xrightarrow{d_i} im(d_i) = ker(d_{i-1}) \to 0$ für alle $i \geq 0$ eine projektive Hülle von $im(d_i)$ ist.*

**Korollar 6.4.** *(i) Je zwei minimale projektive Auflösungen sind isomorph (und damit nicht nur homotop wie projektive Auflösungen).*

*(ii) Ist $R$ eine endlich dimensionale Algebra über einem Körper $k$, so besitzt jeder endlich erzeugte $R$-Modul $M$ eine minimale projektive Auflösung.*

*Beweis.* (i) Seien

$$\begin{tikzcd} (P_\bullet, d) \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ (Q_\bullet, e) \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

zwei projektive Auflösungen von $M$. Dann existiert $f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ ein Morphismus von Komplexen, der einen Isomorphismus zwischen den Kohomologiegruppen induziert (vgl. Lemma 2.3). Somit kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ Q_0 \arrow[r, "e_0"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

und nach Lemma 6.2 (i) ist $f_0$ bijektiv. Damit können wir nun das folgende kommtative Diagramm betrachten

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker(d_0) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "f_0|_{\ker(d_0)}"'] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\cong"', "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "id_M"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker(e_0) \arrow[r, "\subseteq"] & Q_0 \arrow[r, "e_0"] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Aus dem Schlangenlemma folgt, dass $f_0 \mid_{\ker(d_0)}: \ker(d_0) \to \ker(e_0)$ ebenfalls bijektiv ist. Damit ist der erste Schritt fertig. Nun betrachten wir das kommtative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \xrightarrow{d_1} & \mathrm{im}(d_1) = \ker(d_0) & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \cong \downarrow {\scriptstyle f_0|_{\ker(d_0)}} & & \\ Q_1 & \xrightarrow{e_1} & \mathrm{im}(e_1) = \ker(e_0) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

und fahren induktiv fort wie für $M$.

(ii) Um die Aussage zu zeigen, wende Lemma 6.2 (ii) induktiv an:
Sei $P_0 \xrightarrow{d_0} M$ eine projektive Hülle von $M$. Dann gilt, dass $dim_k(P_0) < \infty$ ist und damit auch $dim_k(ker(d_0)) < \infty$. Folglich ist auch $\ker(d_0)$ endlich erzeugt über $R$ und besitzt also nach Lemma 6.2 (ii) eine projektive Hülle $P_1 \xrightarrow{d_1} ker(d_0) \to 0$. Fahre damit auf die gleiche Weise fort.

□

## 6.2 Poincaré-Reihen und Satz von Quillen

Nun wollen wir den Begriff der Poincaré-Reihe einführen sowie einige Eigenschaften betrachten. Diesen Begriff werden wir benötigen, um schlussendlich den Satz von Quillen zu beweisen. Allgemein orientiert sich dieses Kapitel eng an Kapitel 5.3 des Buches [Ben98] von David Benson. Einige Aussagen werden wir auch nicht beweisen und lediglich auf das jeweilige Resultat im Buch verweisen. Sei also $V$ ein graduierter Vektorraum von endlichem Typ über $k$. In anderen Worten,

$$V = \bigoplus_{r \geq 0} V_r$$

wobei $V_r$ ein endlich dimensionaler Vektorraum über $k$ ist. Wir definieren die Poincaré-Reihe von $V$ durch

$$p(V,t) := \sum_{r \geq 0} t^r dim_k(V_r) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$$

aufgefasst als formale Potenzreihe über $\mathbb{Z}$ mit Variablen $t$. Als erstes einfaches Beispiel wollen wir $V = k[x]$ den Vektorraum der Polynome in einer Variable über einen Körper $k$ mit $\deg(x) = d$ betrachten. Als graduierte Polynom-Algebra ist $V$ also

$$V = k[x] = \bigoplus_{i \geq 0} V_i \quad \text{mit} \quad V_i = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \nmid d \\ kx^j, & \text{falls } i = dj. \end{cases}$$

Dann gilt $dim_k(V_{di}) = dim_k(kx^i) = 1$ für alle $d \geq 0$ und die Poincaré-Reihe hat die Form

$$p(V,t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^{di} = \frac{1}{1-t^d}.$$

Dieses Resultat werden wir später noch benötigen, wenn wir das Beispiel verallgemeinern.

**Proposition 6.5.** ***(Hilbert, Serre)***
*Sei $R$ ein kommutativer graduierter Ring von endlichem Typ über einem Körper $k$ und endlich erzeugt über $R_0$ durch homogene Elemente $x_1, ..., x_s$ vom Grad $k_1, ..., k_s$. Sei weiter $V$ ein endlich erzeugter graduierter $R$-Modul, mit andern Worten $R_i V_j \subseteq V_{i+j}$ für alle $i, j \geq 0$. Dann ist die Poincaré-Reihe $p(V,t)$ von $V$ eine rationale Funktion und ist von der Form*

$$p(V,t) = f(t) / \prod_{j=1}^{s} (1 - t^{k_j}),$$

*wobei $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist.*

*Beweis.* Vergleiche [Ben98], Theorem 5.3.1. □

*Bemerkung.* Die Aussage der Proposition gilt auch unter der allgemeineren Voraussetzung, dass $R$ ein lediglich antikommutativer graduierter Ring ist. Klassisch wird der Satz nur für kommutative $k$-Algebren von endlichem Typ bewiesen.

Die nachfolgende Proposition trifft eine Aussage über das Wachstum von Poincaré-Reihen und der Ordnung des Pols des Polynoms an der Stelle $t = 1$.

**Proposition 6.6.** (Vgl. [Ben98], Proposition 5.3.2) *Sei*

$$p(t) = f(t)/\prod_{j=1}^{s}(1 - t^{k_j}) = \sum_{r\geq 0} a_r t^r,$$

*wobei $f(t)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist und $a_r \in \mathbb{Z}$ nicht negativ sind. Ist $f(t) = (t-1)^d g(t)$ mit $g(1) \neq 0$ und sei $\gamma = ord_1 p(t) := \sum_{j=1}^{s} k_j - d$ die Ordnung des Pols von $p(t)$ an der Stelle 1. Dann gilt:*

*(i) es existiert eine Konstante $\kappa > 0$, so dass $a_n \leq \kappa n^{\gamma-1}$ für alle $n > 0$;*

*(ii) im Fall $\gamma \geq 1$ ist, dann existiert keine Konstante $\kappa > 0$, so dass $a_n \leq \kappa n^{\gamma-2}$ für alle $n > 0$.*

*Beweis.* Die Aussage bleibt unverändert, wenn wir $p(t)$ durch $p(t) \cdot \prod_{j=1}^{s}(1 + t + ... + t^{k_j-1})$ ersetzen. Also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit alle $k_j = 1$ setzen. Somit können wir annehmen, dass $p(t)$ die Gestalt $p(t) = f(t)/(1-t)^{\gamma}$ hat mit $f(1) \neq 1$. Sei $f(t)$ von der Form $f(t) = \alpha_m t^m + ... + \alpha_0$. Dann lassen sich die Koeffizienten $a_n$ wie folgt berechnen mit

$$a_n = \alpha_0 \binom{n+\gamma-1}{\gamma-1} + \alpha_1 \binom{n+\gamma-2}{\gamma-1} + ... + \alpha_m \binom{n+\gamma-m-1}{\gamma-1}.$$

Dafür verwendet man die Gleichung

$$(1-t)^{-\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\gamma-1}{\gamma-1} t^n$$

in $\mathbb{Z}[\![t]\!]$, die per Induktion nach $\gamma \geq 0$ bewiesen wird. Die Bedingung $f(1) \neq 1$ impliziert, dass $\alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_m \neq 0$ und

$$\binom{n+\gamma-1}{\gamma-1} \leq (n+\gamma-1) \cdot ... \cdot (n+1) \leq cn^{\gamma-1}$$

mit $c > 0$. Somit ist dieser Ausdruck ein Polynom mit Grad genau $\gamma - 1$ in $n$ und lässt sich abschätzen wie oben behauptet. □

**Definition 6.7.** *Sei $V$ ein graduierter Vektorraum von endlichem Typ über einem Körper $k$ und die Poincaré-Reihe $p(V, t)$ von $V$ habe die Form*

$$p(t) = f(t)/\prod_{j=1}^{s}(1 - t^{k_j})$$

*wobei $f(t)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Dann schreiben wir $\gamma(V)$ für die Ordnung des Pols von $p(V, t)$ an der Stelle $t = 1$. Nach obiger Proposition misst diese Zahl die polynomielle Wachstumsrate der Dimensionen der $V_r$. Daher heißt $\gamma(V)$ das Wachstum von $V$.*

Ab nun sei $k$ ein Körper und $G$ eine endliche Gruppe. Für jeden einfachen $k[G]$-Modul $S$, ein Modul der nur die trivialen Untermoduln besitzt, sei $P_S$ die projektive Hülle von $S$. Ist dann $M$ ein endlich erzeugter $k[G]$-Modul und $P_\bullet \to M \to 0$ eine minimale projektive Auflösung (vgl. Korollar 6.4 (ii)), so gilt nach [Ben98] Seite 159, dass

$$dim_k(P_r) = \sum_{\text{S einfach}} \frac{dim_k(P_S)}{dim_k(End_{k[G]}(S))} \cdot dim_k(Ext^r_{k[G]}(M, S)). \tag{6.1}$$

Nun ist $Ext^*_{k[G]}(M, S)$ über das Cup-Produkt ein endlich erzeugter Modul über den anti-kommutativen Ring $H^*(G, k)$ ([Ben98] Corollary 4.2.4), so dass seine Poincaré-Reihe nach Proposition 6.5 und der anschließenden Bemerkung die Form

$$p(Ext^*_{k[G]}(M, S), t) = \frac{f_S(t)}{\prod_{j=1}^{s}(1 - t^{k_j})} \tag{6.2}$$

hat. Nach [Ben98] Seite 159 ist $dim_k(End_{k[G]}(S))) =: e(S)$ ein Teiler von $dim_k(Ext^r_{k[G]}(M, S))$ in $\mathbb{Z}$ für alle $r \geq 0$, weil der Quotient die Vielfachheit von $P_S$ als direkter Summand von $P_r$ ist. Daher teilt $e(S)$ alle Koeffizienten von

$$p(Ext^*_{k[G]}(M, S), t) = \sum_{r \geq 0} t^r dim_k(Ext^r_{k[G]}(M, S))$$

und damit von

$$f_S(t) = p(Ext^*_{k[G]}(M, S), t) \cdot \prod_{j=1}^{s}(1 - t^{k_j}).$$

Es folgt, dass auch $f_S(t) \cdot e_S^{-1} \in \mathbb{Z}[t]$ ist, daher hat auch die Poincaré-Reihe des graduierten Vektorraums $P_* := \bigoplus_{r \geq 0} P_r$ die Form

$$p(P_*, t) = \underbrace{(\sum_{\text{S einfach}} dim_k(P_S) \cdot e_s^{-1} \cdot f_s(t))}_{\in \mathbb{Z}[t]} / \prod_{j=1}^{s}(1 - t^{k_j}),$$

nach Gleichung (6.1) und (6.2). Damit können wir nun die Komplexität eines $k[G]$-Moduls $M$ definieren.

**Definition 6.8.** *Sei $M$ ein endlich erzeugter $k[G]$-Modul. Die Komplexität $c_G(M)$ von $M$ ist definiert als das Wachstum $\gamma(P_*)$ einer minimalen projektiven Auflösung $P_*$ von $M$. Man beachte, dass diese Größe nach Korollar 6.4 (i) von der Wahl einer konkreten minimalen projektiven Auflösung $P_*$ unabhängig ist.*

**Proposition 6.9.** *Es gilt dass*

$$c_G(M) = \gamma(Ext^*_{k[G]}(M, M)).$$

*Beweis.* Vergleiche [Ben98], Proposition 5.3.5. □

Nun definieren wir die Krulldimension des antikommutativen graduierten Ringes $H^*(G,k)$ als das Wachstum von $H^*(G,k)$ als graduiertem $k$-Vektorraum

$$dim(H^*(G,k)) := \gamma(H^*(G,k)) \overset{6.9}{=} c_G(k).$$

Nach [Ben98] Theorem 5.4.6 stimmt diese Definition der Krulldimension für antikommutative graduierte $k$-Algebren von endlichem Typ mit der üblichen Definition überein, falls der Ring kommutativ ist. Insbesondere ist $\gamma(H^{\cdot}(G,k))$ also gleich der Krulldimension des kommutativen Ringes $H^{\cdot}(G,R)$ im herkömmlichen Sinne.

Um die letzten beiden Sätze, den von Alperin-Evens und den von Quillen, formulieren zu können, müssen wir noch einführen, was es für eine $p$-Gruppe bedeutet, elementar abelsch zu sein.

**Definition 6.10.** *Eine endliche $p$-Gruppe $P$ heißt elementar abelsch, falls $p \cdot P = 0$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass $P \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$ ist für ein $r \in \mathbb{N}$. Dann heißt $r$ der Rang von $P$. Dies entspricht der Vektorraumdimension von $P$ über $\mathbb{F}_p$, also ist $r = dim_{\mathbb{F}_p}(P)$.*

**Satz 6.11.** ***(Satz von Alperin-Evens)***
*Die Komplexität $c_G(M)$ entspricht dem Maximum der Komplexitäten $c_P(M)$ für die Restriktion von $M$ auf eine elementar abelsche Untergruppe $P \leq G$, also*

$$c_G(M) = \max\{c_P(M) | P \leq G \text{ elementar abelsche } p\text{-Gruppe}\}.$$

*Beweis.* Vergleiche [Ben98], Proposition 5.3.7. □

**Beispiel 6.12.** Für elementar abelsche $p$-Gruppen $P$ wollen wir jetzt die Poincaré-Reihe von $H^*(P,k)$ und damit die Komplexität $c_P(k)$ des trivialen $k[P]$-Moduls $k$ explizit berechnen. Dieses Resultat werden wir im nachfolgenden Beweis verwenden. Dafür benotigen wir das folgende Verhalten von Poincaré-Reihen: Sind $V_* = \bigoplus_{r\geq 0} V_r$ und $W_* = \bigoplus_{s\geq 0} W_s$ zwei graduierte $k$-Vektorräume, dann ist

$$V_* \underset{k}{\otimes} W_* = \bigoplus_{r,s\geq 0} V_r \underset{k}{\otimes} W_s \tag{6.3}$$

ebenfalls ein graduierter $k$-Vektorraum mit

$$(V_* \underset{k}{\otimes} W_*)_q = \bigoplus_{r+s=q} V_r \underset{k}{\otimes} W_s.$$

Wegen

$$dim_k((V_* \underset{k}{\otimes} W_*)_q) = \sum_{r+s=q} dim_k(V_r) \cdot dim_k(W_s)$$

verhällt sich die Poincaré-Reihe multiplikativ, denn es gilt

$$\begin{aligned} p(V_* \underset{k}{\otimes} W_*, t) &= \sum_{q\geq 0} t^q \cdot dim_k((V_* \underset{k}{\otimes} W_*)_q) \\ &= \sum_{q\geq 0} t^q \cdot (\sum_{r+s=q} dim_k(V_r) \cdot dim_k(W_s)) \\ &= p(V_*,t) \cdot p(W_*,t). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Sei also $P = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ eine elementar abelsche $p$-Gruppe. Mit Hilfe der Künneth-Formel können wir den Kohomolgiering von $P$ angeben und es gilt nach Beispiel 4.4, dass

$$H^*((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n, k) = k[x_1, ..., x_n]$$

mit $\deg(x_i) = 1$, falls $p = 2$ ist oder

$$H^*((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n, k) = \Lambda(x_1, ..., x_n) \underset{k}{\otimes} k[y_1, ..., y_n]$$

mit $\deg(x_i) = 1$ und $\deg(y_i) = 2$, falls $p > 2$ ist. Nun können wir die Poincaré-Reihe von $H^*(P, k)$ als graduierte $k$-Vektorräume berechnen. Auf Grund der Multiplikativität (vgl. Gleichung (6.4)) und $p(k[x], t) = 1/(1-t)$ für $\deg(x) = 1$ (vgl. erstes Beispiel in diesem Abschnitt) folgt dann für den ersten Fall, dass

$$p(k[x_1, ..., x_n], t) = p(k[x_1], t) \cdot ... \cdot p(k[x_n], t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1-t)} = \frac{1}{(1-t)^n}.$$

Für den zweiten Fall gilt

$$p(\Lambda(x_1, ..., x_n), t) = p(\bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(x_1, ..., x_n), t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n,$$

da $\dim(\Lambda^k(x_1, ..., x_n)) = \binom{n}{k}$ und

$$p(k[y_1, ..., y_n], t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1-t^2)} = \frac{1}{(1-t^2)^n},$$

da $\deg(y_i) = 2$ ist. Also folgt insgesamt

$$p(\Lambda(x_1, ..., x_n) \underset{k}{\otimes} k[y_1, ..., y_n], t) = (1+t)^n \cdot \frac{1}{(1-t^2)^n} = \frac{(1+t)^n}{((1-t)(1+t))^n} = \frac{1}{(1-t)^n}.$$

Das bedeutet, dass für jede elementar abelsche $p$-Gruppe $P$ die Poincaré-Reihe von $H^*(P, k)$ die Gestalt

$$p(H^*(P, k), t) = \frac{1}{(1-t)^n}$$

hat und folglich gilt für die Komplexität

$$c_P(k) = \gamma(H^*(P, k)) = n = dim_{\mathbb{F}_p}(P).$$

**Satz 6.13.** ***(Satz von Quillen)***
*Ist $R = k$ ein Körper mit Charakteristik $p$, so gilt für die Krulldimension von $H^{\cdot}(G, R)$, dass*

$$dim(H^{\cdot}(G, R)) = r_p(G),$$

*wobei*

$$r_p(G) := \max\{dim_{\mathbb{F}_p}(P) \mid P \leq G \text{ ist elementar abelsche Untergruppe von } G\}$$

*der sogenannte $p$-Rang von $G$ ist.*

*Beweis.* Der Beweis ist nun nur noch eine Folgerung unserer vorherigen Resultate. Sei also $P_\bullet \to k \to 0$ eine minimale Projektive Auflösung des $k[G]$-Moduls $k$ und

$$p(P_\bullet, t) = \sum_{i \geq 0} t^i dim_k(P_i)$$

die Poincaré-Reihe von $P_\bullet$ mit $dim_k(P_i) < \infty,\ \forall i \geq 0$ (vgl. Abschnitt 6.1). Dann gilt wie vor Definition 6.8 gesehen, dass diese von der Form

$$p(t) = f(t)/\prod_{j=1}^{s}(1 - t^{k_j}) \ \text{ mit } f(t) \in \mathbb{Z}[t]$$

ist. Nun betrachten wir $c_G(k) = \gamma(P_\bullet)$, die Komplexität von $k$ wie in Definition 6.8. Diese entspricht nach Proposition 6.9 und der nachfolgenden Bemerkung der Krulldimension von $H^\cdot(G, k)$ und nach dem Satz von Alperin-Evens ist diese gleich dem maximalen Wert von $c_P(k)$, wobei $P$ die elementar abelschen $p$-Untergruppen von $G$ durchläuft. Insgesamt erhalten wir also

$$dim(H^\cdot(G, k)) = \gamma(P_\bullet) = c_G(k) = \max\{c_P(M) | P \leq G \text{ elementar abelsche } p\text{-Gruppe}\}.$$

Ist $P = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ eine elementar abelsche der Ordnung $p^n$, so ist die Poincaré-Reihe von $H^*(P, k)$ gleich $1/(1 - t)^n$, wie im vorherigen Beispiel 6.12 berechnet. Für die Komplexität $c_P(k)$ gilt

$$c_P(k) = \gamma(H^*(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, k)) = n = dim_{\mathbb{F}_p}(P).$$

Das beweist die Aussage. □

## Quellenverzeichnis


1. [Ben04] Benson, David J.: *Commutative Algebra in the Cohomology of Groups*, Cambridge University Press, New York, 2004.
2. [Ben91] Benson, David J.: *Representations and Cohomology I: Basic representation theory of finite groups and associative algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
3. [Ben98] Benson, David J.: *Representations and Cohomology II: Cohomology of groups and modules*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
4. [Bos13] Bosch, Siegfried: *Algebraic Geometry and Coummtative Algebra*, Springer-Verlag, London, 2013.
5. [Bro82] Brown, Kenneth S.: *Cohomology of Groups*, Springer-Verlag, 1982.
6. [Fis14] Fischer, Gerd: *Lineare Algebra, Eine Einführung für Studienanfänger*, Springer-Verlag, 2014.
7. [Iyn04] Iyengar, Srikanth: *Modules and Cohomology over Group Algebras: One Commutative Algebraist's Perspective*, Cambridge University Press, New York, 2004.
8. [Neu11] Neukirch, Jürgen; Schmidt, Alexander: *Klassenkörpertheorie*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

## Eidesstattliche Versicherung

Ich versichere an Eides statt durch meine Unterschrift, dass ich die vorstehende Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe angefertigt und alle Stellen, die ich wörtlich oder annähernd wörtlich aus Veröffentlichungen entnommen habe, als solche kenntlich gemacht habe, mich auch keiner anderen als der angegebenen Literatur oder sonstiger Hilfsmittel bedient habe. Die Arbeit hat in dieser oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

*Ort, Datum* *Unterschrift*