Bachelorarbeit Mathematik

Approximations- und Existenzsätze für holomorphe Funktionen

Autor
Michael Fitz

Betreuer
Prof. Dr. Daniel Greb

Sommersemester 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In den vielen verschiedenen Gebieten der Mathematik handelt es sich bei der Funktionentheorie um das Teilgebiet, bei dem man sich mit komplexwertigen Funktionen befasst. Von besonders großem Interesse sind dabei Funktionen, welche komplex differenzierbar in jedem Punkt einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind. Wie wir bereits aus den Grundlagen der Funktionentheorie wissen, nennt man solche Funktionen holomorph.

Im ersten Teil dieser Arbeit widmen wir uns der Frage, wann man eine auf einer beschränkten offenen Menge U holomorphe Funktion auf kompakten Teilmengen von U durch Funktionen approximieren kann, die holomorph auf einem Gebiet sind, welches U enthält. Dabei beantwortet uns der Satz von Runge diese Frage und stellt dabei ein wichtiges Fundament für den Rest dieser Arbeit dar, da wir diesen Satz benutzen werden, um zwei wichtige Existenzsätze im darauf folgenden Teil dieser Arbeit zu beweisen.

Aus den Grundlagen der Funktionentheorie kennen wir bereits den Potenzreihenentwicklungssatz [1, Kapitel III, Satz 2.2, S.106], aus welchem man die Folgerung schließen kann, dass man jede Funktion, welche holomorph auf einer offenen und beschränkten Menge U ist, auf jeder ganz in U gelegenen kompakten Kreisscheibe durch Polynome approximieren kann. Der Potenzreihenentwicklungssatz ist dabei eine wichtige Grundlage für die gesamte Arbeit und mit dem Satz von Runge werden wir eine Verallgemeinerung der soeben erwähnten Folgerung formulieren können.

Bei den beiden zuvor erwähnten Existenzsätzen handelt es sich um den Satz von Mittag-Leffler und den Produktsatz von Weierstraß. Der Satz von Mittag-Leffler sagt aus, dass man für jede beliebige Menge, welche diskret in einem Gebiet ist, eine meromorphe Funktion erhält, deren Laurententwicklung um jeden Punkt dieser diskreten Menge einen gegebenen Hauptteil hat. Beim Produktsatz von Weierstraß hingegen erhalten wir für eine beliebige diskrete Menge die Existenz einer holomorphen Funktion, deren Nullstellenmenge die gegebene diskrete Menge ist.

Dabei ist das besondere an diesen beiden Existenzsätzen, dass wir diskrete Mengen in einem beliebigen Gebiet betrachten. Würden wir nur Mengen betrachten, welche diskret in $\mathbb{C}$ sind, so wäre dies nur ein Spezialfall der Existenzsätze und wir bräuchten nicht den Satz von Runge, um diese zu beweisen.

Zum Schluss dieser Arbeit betrachten wir einige Folgerungen aus den Existenzsätzen. Dabei definieren wir zunächst den Begriff der analytischen Fortsetzbarkeit und beweisen mit der Hilfe des Produktsatzes von Weierstraß, dass es für jedes Gebiet D eine holomorphe Funktion f gibt, so dass man f nicht auf ein größeres Gebiet analytisch fortsetzen kann. Mit beiden Existenzsätzen beweisen wir zudem den sogenannten Interpolationssatz, dessen Aussage dem Satz von Mittag-Leffler ähnelt. Hier haben wir ebenfalls eine diskrete Menge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in einem Gebiet D, für die man eine holomorphe Funktion erhält, die man auf einer Umgebung eines jeden Punktes a_n als Summe eines gegebenen Polynoms mit gewissen Eigenschaften und einer Funktion, die holomorph auf einer Umgebung von a_n ist, darstellen kann.

Als Hauptliteraturquelle wird in dieser Arbeit das im Jahre 1998 veröffentlichte Buch „Introduction to Complex Analysis“ [2] von Junjiro Noguchi verwendet.

2 Approximationssätze für holomorphe Funktionen

Im Folgenden sei $U \subset \hat{\mathbb{C}} \backslash \{p\}$ offen mit $p \in \hat{\mathbb{C}}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir aber durch eine Möbiustransformation $U \subseteq \mathbb{C}$ annehmen.

2.1 Approximation von holomorphen Funktionen und der Satz von Runge

Im Jahre 1885 veröffentlichte Carl Runge seinen fundamentalen Satz über die Approximation von holomorphen Funktionen, welcher zunächst wenig beachtet wurde und erst in den 1920er Jahren anfing, die Funktionentheorie stark zu beeinflussen (vgl. [3, Kapitel 13, S.290]). Um diesen Satz beweisen zu können, brauchen wir zunächst zwei Lemmata.
Alle Sätze und Beweise im Unterkapitel 2.1 sind in Anlehnung an [2, Kapitel 7.1, S.179-183].

Lemma 2.1
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt, $K \subset U$ kompakt und f holomorph auf U. Dann gibt es für $\varepsilon > 0$ eine rationale Funktion F, so dass alle Polstellen von F auf ∂U liegen und

$$|f(z) - F(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in K. \tag{2.1}$$

Man sagt: f kann auf K durch rationale Funktionen gleichmäßig approximiert werden.

Beweis.
Seien $n \in \mathbb{N}$, $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$. Wir definieren folgende Mengen:

$$E_n(j,k) := \left\{ x + iy = z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{j}{2^n} \leq x \leq \frac{j+1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \leq y \leq \frac{k+1}{2^n} \right\}, \tag{2.2}$$

$$E_n := \bigcup_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2 : E_n(j,k) \subseteq U} E_n(j,k). \tag{2.3}$$

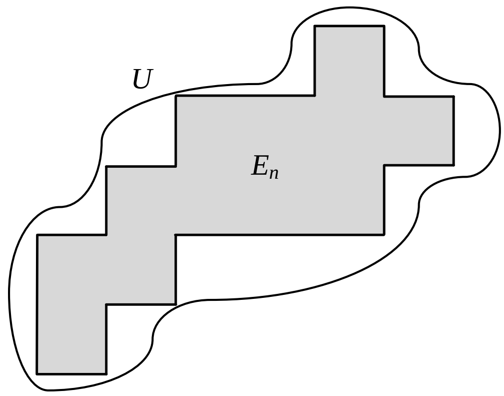

Abbildung 2.1: Die Vereinigung E_n der Quadrate $E_n(j,k)$, welche in einer offenen Menge U enthalten sind.

Zudem sei U_n das Innere von E_n. Dann gilt $U_n \subseteq U_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$.
Da $K \subseteq U$ kompakt ist, existiert nach der Heine-Borelschen Überdeckungseigenschaft [4, Kapitel 1.4, S.28] ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$K \subseteq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0.$$

Sei $n \geq n_0$ beliebig und $z \in K$, so dass $z \notin \partial E_n(j,k)$ $\forall (j,k) \in \mathbb{Z}^2$. Dann exisitert genau ein $(j_0,k_0) \in \mathbb{Z}^2$ mit $z \in E_n(j_0,k_0)$. Nach der Cauchy-Formel [1, Kapitel III, Bem. 3), S.166] und [1, Kapitel IV, A7 Bem., S.240] gilt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E_n(j,k)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & \text{falls } (j,k) = (j_0,k_0) \\ 0, & \text{falls } (j,k) \neq (j_0,k_0) \end{cases} \tag{2.4}$$

und daraus folgt

$$\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2 : E_n(j,k)\subseteq U} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E_n(j,k)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \tag{2.5}$$

Analog erhält man mit der Cauchy-Formel [1, Kapitel III, Bem. 3), S.166] und [1, Kapitel IV, A7 Bem., S.240], dass (2.5) für alle $z \in K$ mit $n \geq n_0$ gilt. Sei nun

$$\delta_0 := d(K; \partial U_{n_0}) := \inf\{|z - \omega| : z \in K, \omega \in \partial U_{n_0}\} \tag{2.6}$$
$$= \min\{|z - \omega| : z \in K, \omega \in \partial U_{n_0}\} > 0. \tag{2.7}$$

Wähle nun $n \geq n_0$, so dass $\frac{1}{2^n} \leq \frac{\delta_0}{2}$. Seien $\gamma_1, ..., \gamma_{l_n} : [0,1] \to \partial U_n$ stetig mit $\gamma_{l_n}(1) = \gamma_1(0)$ und

$$\begin{aligned}
&\gamma_j(1) = \gamma_{j+1}(0) \qquad \forall j \in \{1, ..., l_n\},\\
&l(\gamma_j) = \frac{1}{2^n} \qquad \forall j \in \{1, ..., l_n\},\\
&\sum_{j=1}^{l_n} \int_{\gamma_j} g(z)dz = \int_{\partial U_n} g(z)dz \qquad \forall g \in C^0(U, \mathbb{C}).
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Die Wege γ_1,...,γ_{l_n} stellen die einzelnen Randstücke der Länge $\frac{1}{2^n}$ von ∂U_n dar. Sei $E_n(j,k) \subseteq U$, so dass $\gamma_\nu([0,1]) \subseteq E_n(j,k)$ für ein $\nu \in \{1, ..., l_n\}$. Dann existiert $(j', k') \in \mathbb{Z}^2$, so dass $E_n(j', k') \cap E_n(j,k) = \gamma_\nu([0,1])$. Insbesondere gilt dann per Konstruktion $E_n(j', k') \cap \partial U \neq \varnothing$. Sei $\xi_\nu \in E_n(j', k') \cap \partial U$.

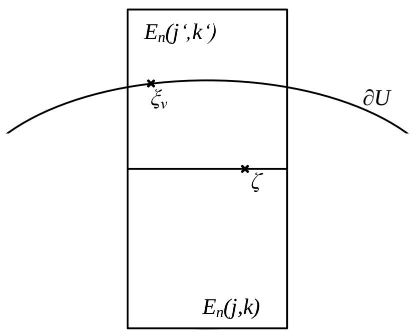

Abbildung 2.2: (vgl. [2, S.181])

Dann gilt für $z \in K$ und $\zeta \in \gamma_\nu([0,1])$:

$$|\zeta - \xi_\nu| \leq \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \delta_0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |z - \xi_\nu| \tag{2.8}$$

Also folgt:

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - \xi_\nu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - \xi_\nu}{z - \xi_\nu}} = -\frac{1}{z - \xi_\nu} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - \xi_\nu}{z - \xi_\nu}\right)^i. \tag{2.9}$$

Bei $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-\xi_\nu}{z-\xi_\nu}\right)^i$ handelt es sich offensichtlich um eine geometrische Reihe mit $\left|\frac{\zeta-\xi_\nu}{z-\xi_\nu}\right| \le \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Daraus folgt, dass für $\varepsilon > 0$ ein $N_\nu \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} + \sum_{i=0}^{N_\nu} \frac{(\zeta-\xi_\nu)^i}{(z-\xi_\nu)^{i+1}}\right| < \varepsilon \quad \forall z \in K, \zeta \in \gamma([0,1]). \tag{2.10}$$

Wir definieren nun

$$F_\nu(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\nu} \sum_{j=0}^{N_\nu} \frac{(\zeta-\xi_\nu)^j}{(z-\xi_\nu)^{j+1}} f(\zeta)d\zeta, \tag{2.11}$$

$$F(z) := -\sum_{\nu=1}^{l_n} F_\nu(z), \tag{2.12}$$

$$M := \max\{|f(\zeta)| : \zeta \in \partial U_n\}. \tag{2.13}$$

Man beachte hierbei, dass F eine rationale Funktion mit Polstellen auf ∂U ist. Somit erhalten wir mit (2.5):

$$|f(z) - F(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \sum_{\nu=1}^{l_n} F_\nu(z)\right| \tag{2.14}$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{l_n}\int_{\gamma_\nu}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \sum_{\nu=1}^{l_n} F_\nu(z)\right| \tag{2.15}$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{l_n}\int_{\gamma_\nu}\left|f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} + \sum_{j=0}^{N_\nu}\frac{(\zeta-\xi_\nu)^j}{(z-\xi_\nu)^{j+1}}\right)\right|d\zeta \tag{2.16}$$

$$\le \frac{l_n M}{2^{n+1}\pi}\cdot\varepsilon \tag{2.17}$$

Daraus folgt: F kann auf K durch rationale Funktionen mit Polstellen höchstens auf ∂U gleichmäßig approximiert werden.

□

Mit Lemma 2.1 allein könnte man zunächst denken, dass wir noch nicht besonders weit gekommen sind, unsere Frage über die Approximation durch Funktionen, welche holomorph auf größeren Gebieten sind, zu beantworten, da wir eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ durch rationale Funktionen mit Polstellen auf ∂U approximiert haben. Diese rationalen Funktionen sind also auf keiner offenen Menge holomorph, welche $\overline{U}$ enthält.
Dieses Problem lösen wir mit dem folgenden Lemma, welches auch bekannt ist als „Polstellenverschiebungssatz "(vgl. [3, Kapitel 12, S.268]). Wie der Name schon sagt, „verschieben" wir dabei sozusagen die Polstelle $a \in \mathbb{C}$ einer rationalen Funktion auf einen anderen Punkt

$b \in \mathbb{C}$, indem wir eine rationale Funktion mit Polstelle bei a durch rationale Funktionen mit einer Polstelle bei b approximieren.

Lemma 2.2

Seien $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, $a, b \in \mathbb{C}\backslash K$ zwei Punkte in der gleichen Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\backslash K$ und F eine rationale Funktion mit höchstens einer Polstelle bei a. Dann kann F auf K durch rationale Funktionen mit höchstens einer Polstelle bei b gleichmäßig approximiert werden.

Beweis.

Da F eine rationale Funktion mit höchstens einer Polstelle bei a ist, lässt sich F darstellen als

$$F(z) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \cdot \frac{1}{(z-a)^k} \text{ mit } n \in \mathbb{N}, \text{ wobei } c_k \in \mathbb{C} \quad \forall k \in \{-N, ..., N\}. \tag{2.18}$$

Sei nun $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\backslash K$ ein stetiger Weg mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$. Wir bezeichnen mit $\delta_0 := \min\{|z - \omega| : z \in K, \omega \in \gamma([0,1])\} > 0$ den Abstand zwischen K und der Kurve $\gamma([0,1])$ und definieren eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 <...< t_n = 1$ von $[0,1]$ mit $|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| < \frac{\delta_0}{2} \quad \forall i \in \{1,...,n-1\}$.

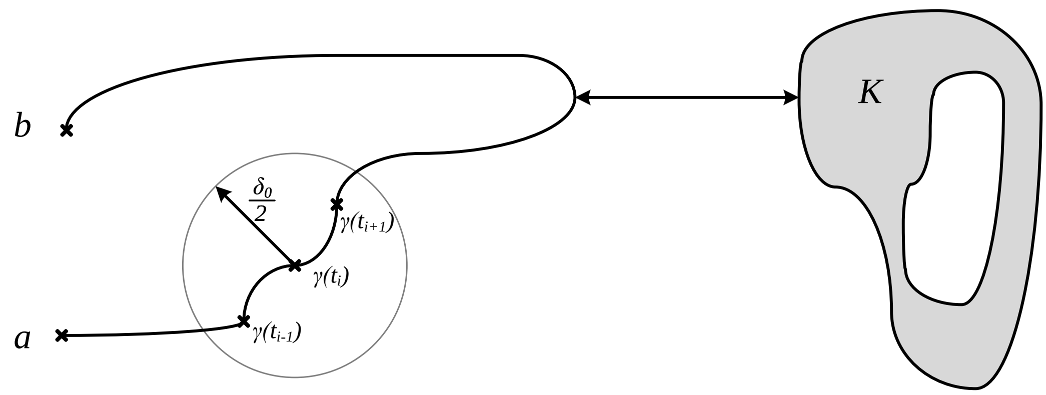

Abbildung 2.3: (vgl. [2, S.182])

Es gilt:

$$\left|\frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})}{z - \gamma(t_{i+1})}\right| < \frac{\frac{\delta_0}{2}}{\delta_0} = \frac{1}{2} \quad \forall z \in K. \tag{2.19}$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{z-\gamma(t_i)} = \frac{1}{z-\gamma(t_{i+1})} \cdot \frac{1}{1-\frac{\gamma(t_i)-\gamma(t_{i+1})}{z-\gamma(t_{i+1})}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\gamma(t_i)-\gamma(t_{i+1}))^j}{(z-\gamma(t_{i+1}))^{j+1}}. \tag{2.20}$$

Seien nun $f(z) := \frac{1}{z-\gamma(t_i)}$, $f_n(z) := \sum_{j=0}^{n} \frac{(\gamma(t_i)-\gamma(t_{i+1}))^j}{(z-\gamma(t_{i+1}))^{j+1}}$ und U eine Umgebung von K mit $U \cap \{a\} = U \cap \{b\} = \emptyset$, $d(\partial U, \gamma([0,1])) > \frac{\delta_0}{2}$. Aus [1, Kapitel III, Satz 1.3, S.100] folgt: Für alle $k \in \mathbb{N}$ konvergiert $f_n^{(k-1)}$ gleichmäßig gegen $f^{(k-1)}$ auf kompakten Teilmengen von U. Also gilt:

$$f^{(k-1)}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k-1)}(z). \tag{2.21}$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$(-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot \frac{1}{(z-\gamma(t_i))^k} = \sum_{j=0}^{\infty} (\gamma(t_i)-\gamma(t_{i+1}))^j \cdot (-1)^{k-1} \cdot \frac{\prod_{l=1}^{k-1}(j+l)}{(z-\gamma(t_{i+1}))^{j+k}}. \tag{2.22}$$

Dies ist wiederum äquivalent zu

$$\frac{1}{(z-\gamma(t_i))^k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\prod_{l=1}^{k-1}(j+l)\right) \cdot (\gamma(t_i)-\gamma(t_{i+1}))^j}{(k-1)! \cdot (z-\gamma(t_{i+1}))^{j+k}}. \tag{2.23}$$

Daraus folgt: $\frac{1}{(z-\gamma(t_i))^k}$ wird für alle $k \in \mathbb{N}$ auf K durch rationale Funktionen mit einer Polstelle bei $\gamma(t_{i+1})$ gleichmäßig approximiert.

Sei $\varepsilon > 0$, $G_{0,k} := \frac{1}{(z-\gamma(t_0))^k}$ für $k \in \{1,...,N\}$ und $M := \max\{|c_k| : k \in \{1,...,N\}\}$. Nun ist es uns möglich, für alle $k \in \mathbb{N}$ induktiv rationale Funktionen $G_{i,k}$ mit höchstens einer Polstelle bei $\gamma(t_i)$ zu definieren, so dass

$$|G_{i,k}(z) - G_{i-1,k}(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in K, i \in \{1,...,n\}. \tag{2.24}$$

Sei

$$G(z) := \left(\sum_{k=-N}^{0} c_k \cdot \frac{1}{(z-a)^k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{N} c_k \cdot G_{n,k}(z)\right) \tag{2.25}$$

Dann ist F eine rationale Funktion mit Polstelle bei a und G eine rationale Funktion mit

Polstelle bei b und es gilt:

$$
\begin{aligned}
& |F(z)-G(z)| && (2.26)\\
= & \left|\sum_{k=-N}^{N} c_k \cdot \frac{1}{(z-a)^k} - \left(\left(\sum_{k=-N}^{0} c_k \cdot \frac{1}{(z-a)^k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{N} c_k \cdot G_{n,k}(z)\right)\right)\right| && (2.27)\\
= & \left|\sum_{k=1}^{N} c_k \cdot \left(\frac{1}{(z-a)^k} - G_{n,k}(z)\right)\right| && (2.28)\\
= & \left|\sum_{k=1}^{N} c_k \cdot \left(G_{0,k}(z) - G_{n,k}(z)\right)\right| && (2.29)\\
\leq & \; M \cdot \sum_{k=1}^{N} \left|\sum_{j=0}^{n-1} \left(G_{j,k}(z) - G_{j+1,k}(z)\right)\right| && (2.30)\\
\leq & \; M \cdot \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} \left|G_{j,k}(z) - G_{j+1,k}(z)\right| && (2.31)\\
< & \; M \cdot N \cdot n \cdot \varepsilon && (2.32)
\end{aligned}
$$

Damit haben wir gezeigt, dass F auf K durch rationale Funktionen mit höchstens einer Polstelle bei b gleichmäßig approximiert werden kann.

□

Mit der gleichmäßigen Approximation von holomorphen Funktionen $f \in \mathcal{O}(U)$ durch rationale Funktionen mit Polstellen höchstens auf ∂U und der Polstellenverschiebung haben wir nun alle notwendigen Mittel, um den Satz von Runge zu beweisen. Zunächst definieren wir jedoch den Begriff der relativen Kompaktheit.

Definition 2.3
Sei $A \subseteq \mathbb{C}$. Eine Teilmenge $B \subseteq A$ heißt relativ kompakt in A, falls $\overline{B}$ kompakt ist und $\overline{B} \subseteq A$. Man schreibt $B \Subset A$.

Satz 2.4 (Satz von Runge)
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $K \subseteq D$ kompakt und f holomorph auf einer Umgebung U von K mit $U \Subset D$. Falls alle Zusammenhangskomponenten von $D \backslash K$ nicht relativ kompakt in D sind, so kann f auf K durch Funktionen gleichmäßig approximiert werden, welche holomorph auf D sind.

Beweis.
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, so dass f holomorph auf U ist und $K \subseteq U \Subset D$. Aus Lemma 2.1 folgt, dass

es für $\varepsilon > 0$ eine rationale Funktion

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=-N}^{N} c_{k,l}(z - a_k)^l \text{ mit } n, N \in \mathbb{N},\ c_{k,l} \in \mathbb{C},\ a_k \in \partial U \tag{2.33}$$

gibt, so dass gilt:

$$|f(z) - F(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in K. \tag{2.34}$$

Für alle $k \in \{1,...,n\}$ bezeichnen wir mit V_k die Zusammenhangskomponente von $D\backslash K$, für die $a_k \in V_k$ gilt. Wir definieren nun

$$F_k(z) := \sum_{l=-N}^{N} c_{k,l}(z - a_k)^l. \tag{2.35}$$

Seien $I_1, I_2 \subseteq \{1,...,n\}$ mit $I_1 \cup I_2 = \{1,...,n\}$, so dass V_{k_1} beschränkt und V_{k_2} unbeschränkt ist für alle $k_1 \in I_1$ und $k_2 \in I_2$.
Dann gilt

$$\overline{V}_{k_1} \cap \partial D \neq \varnothing \quad \forall k_1 \in I_1, \tag{2.36}$$

da V_{k_1} nicht relativ kompakt in $D\backslash K$ ist.
Sei nun $b_{k_1} \in \overline{V}_{k_1} \cap \partial D$ für alle $k_1 \in I_1$ und $b_{k_2} \in V_{k_2}$, so dass $K \subseteq \Delta_{|b_{k_2}|}(0)$ für alle $k_2 \in I_2$.
Dann liegen a_k und b_k in der gleichen Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\backslash K$ für alle $k \in \{1,...,n\}$.
Aus Lemma 2.2 folgt, dass es für $\varepsilon' > 0$ eine rationale Funktion F'_k mit höchstens einer Polstelle bei b_k gibt, so dass gilt:

$$|F_k(z) - F'_k(z)| < \varepsilon' \quad \forall z \in K,\ k \in \{1,...,n\}. \tag{2.37}$$

Sei $\varepsilon'' > 0$. Wir betrachten nun $k \in I_2$. Dann ist F'_k holomorph auf $\Delta_{|b_k|}(0)$ und nach dem Potenzreihenentwicklungssatz [1, Kapitel III, Satz 2.2, S.106] existiert ein Polynom $P_k \in \mathbb{C}[t]$, so dass

$$|F'_k(z) - P_k(z)| < \varepsilon'' \quad \forall z \in K,\ k \in I_2. \tag{2.38}$$

Daraus folgt:

$$|F_k(z) - P_k(z)| \leq |F_k(z) - F'_k(z)| + |F'_k(z) - P_k(z)| < \varepsilon' + \varepsilon'' \quad \forall z \in K,\ k \in I_2. \tag{2.39}$$

Seien nun

$$Q_k(z) := \begin{cases} P_k(z), \text{ falls } k \in I_2 \\ F'_k(z), \text{ falls } k \in I_1 \end{cases} \quad \text{für } k \in \{1,...,n\} \tag{2.40}$$

und

$$Q(z) := \sum_{k=1}^{n} Q_k(z). \tag{2.41}$$

Q ist per Konstruktion eine holomorphe Funktion auf D und es gilt:

$$|F(z) - Q(z)| = |\sum_{k=1}^{n} F_k(z) - \sum_{k=1}^{n} Q_k(z)| \tag{2.42}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |F_k(z) - Q_k(z)| \tag{2.43}$$

$$< \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon' + \varepsilon'') = n(\varepsilon' + \varepsilon'') \quad \forall z \in K. \tag{2.44}$$

Hieraus folgt:

$$|f(z) - Q(z)| \leq |f(z) - F(z)| + |F(z) - Q(z)| \tag{2.45}$$

$$< \varepsilon + n(\varepsilon' + \varepsilon'') \quad \forall z \in K. \tag{2.46}$$

Damit haben wir bewiesen, dass f auf K durch Funktionen gleichmäßig approximiert werden kann, welche holomorph auf D sind.

□

Damit ist unsere Frage aus der Einleitung beantwortet und wir haben gezeigt, dass man $f \in \mathcal{O}(U)$ auf einer kompakten Menge $K \subseteq U$ immer dann durch Funktionen gleichmäßig approximieren kann, welche holomorph auf einem größeren Gebiet D sind, wenn alle Zusammenhangskomponenten von $D \backslash K$ nicht relativ kompakt in D sind.
Beim Satz von Runge und dem Rest dieser Arbeit betrachten wir Gebiete in $\mathbb{C}$. Tatsächlich haben H.Behnke und K.Stein in den 1940er Jahren den Satz von Runge verallgemeinert, indem sie die gleiche Aussage für Gebiete in nicht kompakten Riemannschen Flächen bewiesen haben (vgl. [3, Kapitel 13, S.291]).
Anhand des Beweises vom Satz von Runge können wir nun folgende Aussage über die Approximierbarkeit von holomorphen Funktionen durch Polynome machen.

Korollar 2.5
Seien $D = \mathbb{C}$, $K \subseteq \mathbb{C}$ eine kompakte Teilmenge, so dass $\mathbb{C} \backslash K$ zusammenhängend ist und $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von K. Daraus folgt: Jede holomorphe Funktion auf U kann auf K durch Polynome gleichmäßig approximiert werden.

Korollar 2.5 ist also eine Verallgemeinerung der Folgerung des Potenzreihenentwicklungssatzes [1, Kapitel 3, Satz 2.2, S.106], welche aussagt, dass man eine beliebige holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ auf jeder ganz in U gelegenen kompakten Kreisscheibe durch Polynome gleichmäßig approximieren kann. Nach Korollar 2.5 gilt diese Aussage nicht nur für ganz in U gelegene kompakte Kreisscheiben, sondern für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq U$, für die alle Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \backslash K$ nicht relativ kompakt in $\mathbb{C}$ sind.

2.2 Runge-Ausschöpfung von Gebieten

Wir definieren zunächst den Begriff der Runge-Ausschöpfung:

Definition 2.6
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = D \tag{2.47}$$

eine offene Überdeckung von D. Die Menge $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ heißt Runge-Ausschöpfung von D, falls gilt:

(i) $U_n \Subset U_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Jede Funktion, die holomorph auf einer Umgebung von $\overline{U}_n$ ist, kann auf $\overline{U}_n$ durch Funktionen gleichmäßig approximiert werden, welche holomorph auf D sind.

In diesem Unterkapitel wollen wir zeigen, dass es für jedes Gebiet in $\mathbb{C}$ eine Runge-Ausschöpfung gibt, da wir diese wichtige Aussage für die Beweise der Existenzsätze in Kapitel 3 benötigen. Für den Beweis dieser Aussage brauchen wir den Satz von Runge und zwei Lemmata, mit denen wir wichtige topologische Eigenschaften von Gebieten bzw. offenen Mengen in $\mathbb{C}$ erhalten.
Folgendes Lemma und dessen Beweis basieren auf [2, Kapitel 2.2, S.22]

Lemma 2.7
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ eine in D relativ kompakte Teilmenge U_n, so dass:
(i) $U_n \Subset U_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) Für beliebige kompakte Teilmengen $K \subseteq D$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq U_n$.

Beweis.
Sei $D_r := \{z \in D : d(z, \partial D) > r\}$ und

$$U_n := D_{\frac{1}{n}} \cap \Delta_n(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.48}$$

Dann gilt $\overline{U}_n \Subset U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n. \tag{2.49}$$

Damit gilt (i) und (ii) folgt aus der Heine-Borelschen Überdeckungseigenschaft aus Kapitel 1.4 (S.28) [4]. □

Der Rest des Unterkapitels 2.2 ist angelehnt an [2, Kapitel 7.1, S.183-184].

Lemma 2.8
Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen , $K \subseteq U$ kompakt und $\{V_i\}_{i \in I}$ die Menge der Zusammenhangskomponenten von $U \backslash K$, die relativ kompakt in U sind. Dann ist I höchstens abzählbar und die Menge

$$\tilde{K} := K \cup \bigcup_{i \in I} V_i \tag{2.50}$$

ist kompakt.

Beweis.
Es ist zu zeigen:

(1) I ist höchstens abzählbar.

(2) $\tilde{K}$ ist beschränkt.

(3) $\tilde{K}$ ist abgeschlossen.

Für $\#I = 0$ ist die Aussage trivial, also gehen wir im folgenden von $\#I > 0$ aus.
1.) Da $U \backslash K$ offen ist, enthält jedes V_i mit $i \in I$ rationale Punkte und da die Menge der

rationalen Punkte abzählbar ist, ist somit auch I höchstens abzählbar.
2.) Angenommen, $\tilde{K}$ wäre unbeschränkt. Dann existiert ein $i \in I$, so dass

$$K \subseteq \Delta_{|\frac{a_i}{2}|}(0) \text{ für ein } a_i \in V_i. \tag{2.51}$$

Da $\mathbb{C}\backslash\Delta_{|\frac{a_i}{2}|}(0) \subseteq \mathbb{C}\backslash K$ zusammenhängend ist und $a_i \in \mathbb{C}\backslash\Delta_{|\frac{a_i}{2}|}(0)$, gilt:

$$\mathbb{C}\backslash\Delta_{|\frac{a_i}{2}|}(0) \subseteq V_i. \tag{2.52}$$

Daraus folgt, dass V_i unbeschränkt ist. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass V_i relativ kompakt in U ist. Somit ist $\tilde{K}$ beschränkt.
3.) Angenommen, $\tilde{K}$ wäre nicht abgeschlossen. Dann existiert eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in \tilde{K}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und Grenzwert $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\tilde{K}$. Es gilt also entweder $z_0 \in U\backslash\tilde{K}$ oder $z_0 \in \partial U$.
Falls $z_0 \in U\backslash\tilde{K}$, so gibt es eine Zusammenhangskomponente V von $U\backslash\tilde{K}$ mit $z_0 \in V$, so dass V nicht relativ kompakt in U ist.
Da V offen ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$z_n \in V \quad \forall n \geq n_0. \tag{2.53}$$

Per Voraussetzung existiert aber ein $i \in I$, so dass

$$z_{n_0} \in V_i. \tag{2.54}$$

Demnach würde also $V = V_i$ gelten und dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass V eine Zusammenhangskomponente von $U\backslash\tilde{K}$ ist.
Wir betrachten nun den Fall $z_0 \in \partial U$. Sei $\delta_0 := d(K, \partial U)$.
Da $(z_m)_{m\in N}$ gegen z_0 konvergiert, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$d(z_m, \partial U) < \frac{\delta_0}{2} \quad \forall m \geq n \tag{2.55}$$

und

$$\Delta_{d(z_n,\partial U)}(z_n) \subseteq U\backslash K. \tag{2.56}$$

Für $i \in I$ mit $z_n \in V_i$ gilt dann:

$$\Delta_{d(z_n,\partial U)}(z_n) \subseteq V_i. \tag{2.57}$$

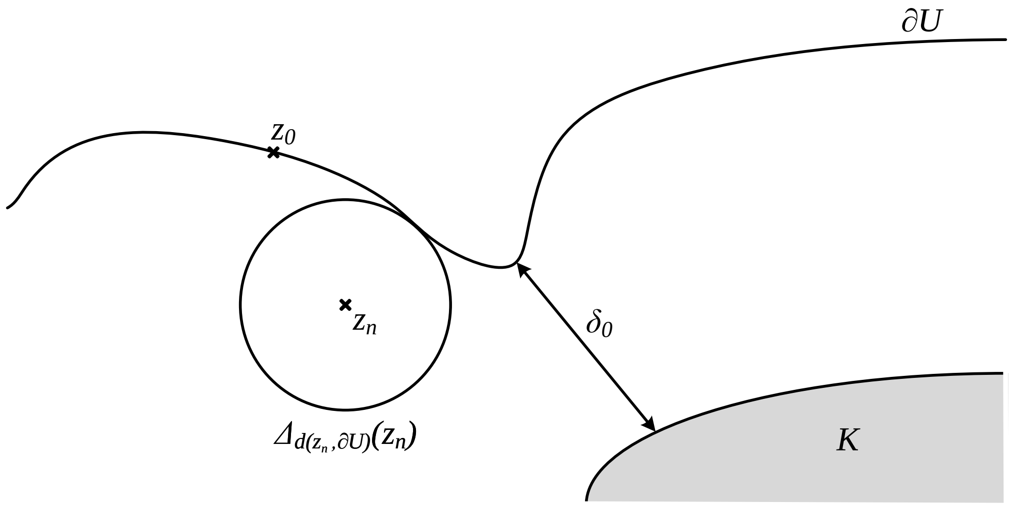

Abbildung 2.4: (vgl. [2, S.184])

Da $\Delta_{d(z_n,\partial U)}(z_n)$ nicht relativ kompakt in U ist, ist auch V_i nicht relativ kompakt in U. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung und somit ist $\tilde{K}$ abgeschlossen.

□

Satz 2.9
Jedes Gebiet hat eine Runge-Ausschöpfung.

Beweis.
Nach Lemma 2.7 existiert eine aufsteigende Folge von offenen Teilmengen V_n mit $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$V_n \Subset V_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.58}$$

und

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n. \tag{2.59}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\{Q_{n,m}\}_{m \in M_n}$ die Menge aller Zusammenhangskomponenten von $D \backslash \overline{V}_n$, welche relativ kompakt in D sind.

Sei W_n das Innere von

$$\overline{V}_n \cup \bigcup_{m \in M_n} Q_{n,m}. \tag{2.60}$$

Aus Lemma 2.8 folgt:

$$\overline{W}_n = \overline{V}_n \cup \bigcup_{m \in M_n} Q_{n,m},\ V_n \subseteq W_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.61}$$

Sei $U_1 := W_{n_1}$, wobei $n_1 := 1$. Da $\overline{U}_1 \Subset D$, folgt aus Lemma 2.7 (ii), dass ein $n_2 \geq n_1$ existiert, so dass

$$\overline{U}_1 \subseteq V_{n_2}. \tag{2.62}$$

Angenommen es exisitert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $U_m := W_{n_m}$ für $n_m \in \mathbb{N}$ und $\overline{U}_m \Subset D$. Dann existiert nach Lemma 2.7 (ii) ein n_{m+1}, so dass

$$\overline{U}_m \subseteq V_{n_{m+1}}. \tag{2.63}$$

Sei dann $U_{m+1} := W_{n_{m+1}}$.
Damit haben wir gezeigt, dass man eine aufsteigende Folge offener Teilmengen U_n von D für $n \in \mathbb{N}$ induktiv definieren kann, so dass

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \tag{2.64}$$

und alle Zusammenhangskomponenten von $D \backslash \overline{U}_m$ nicht relativ kompakt in D sind. Nach der Konstruktion von U_n mit $n \in \mathbb{N}$ gilt für $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ die Aussage (i) in Definition 2.6 und nach dem Satz von Runge gilt die Aussage (ii) in Def. 2.6.

□

3 Existenzsätze für holomorphe Funktionen

3.1 Der Satz von Mittag-Leffler

Wie bereits in der Einleitung angedeutet, beweisen wir nun mit dem Satz von Runge den Satz von Mittag-Leffler für beliebige Gebiete $D \subseteq \mathbb{C}$, welcher eine verallgemeinerte Version des Satzes ist, den Mittag-Leffler 1876/1877 für den Fall $D = \mathbb{C}$ veröffentlicht hat (vgl. [3, Kapitel 6, S.132]).
Sowohl Beispiel 3.3 als auch der Satz von Mittag-Leffler und dessen Beweis sind an [2, Kapitel 7.2, S.185-188] angelehnt.

Satz 3.1 (Satz von Mittag-Leffler)
Für ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ sei $\{a_n\}_{n=1}^N \subseteq D$ mit $N \leq +\infty$ eine Menge ohne Häufungspunkt in D und $a_n \neq a_m$ für alle $n, m \in \{1,...,N\}$ mit $n \neq m$.
Für alle $n \in \{1,...,N\}$ sei eine rationale Funktion Q_{a_n} gegeben mit

$$Q_{a_n}(z) = \sum_{m=1}^{k_n} \frac{c_{-m,n}}{(z - a_n)^m}, \text{ wobei } k_n \in \mathbb{N}, c_{-m,n} \in \mathbb{C} \quad \forall m \in \{1,...,k_n\}. \tag{3.1}$$

Dann existiert eine meromorphe Funktion f auf D mit folgender Eigenschaft: Für alle $n \in \{1,...,N\}$ existieren reelle Zahlen $R_n > 0$ und $0 \leq r_n < R_n$, so dass man f auf $K_{r_n,R_n}(a_n) := \{z \in \mathbb{C} : r_n \leq |z - a_n| \leq R_n\}$ in eine Laurent-Reihe mit dem Hauptteil Q_{a_n} entwickeln kann.

Beweis.
1.Fall: $D \neq \hat{\mathbb{C}}$
Durch eine Möbiustransformation können wir wieder $D \subseteq \mathbb{C}$ annehmen. Nach Satz 2.9 hat D eine Runge-Ausschöpfung $\{U_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ mit $D = \bigcup_{\nu=1}^\infty U_\nu$.
Aus der Voraussetzung, dass $\{a_n\}_{n=1}^N$ keinen Häufungspunkt in D hat folgt, dass die Menge $\{a_n : n \in \{1,...,N\}, a_n \in \overline{U}_\nu\}$ endlich ist für alle $\nu \in \mathbb{N}$.

Für $\nu \in \mathbb{N}$ definieren wir nun:

$$P_\nu(z) := \sum_{a_n \in \overline{U}_\nu} Q_{a_n}(z). \tag{3.2}$$

Sei $g_1 \equiv 0$. Dann ist $g_1 + P_1 - P_2$ holomorph auf einer Umgebung von $\overline{U}_1$, da alle Polstellen von $g_1 + P_1 - P_2$ in $\overline{U}_2 \backslash \overline{U}_1$ liegen. Nach dem Satz von Runge existiert ein $g_2 \in \mathcal{O}(D)$, so dass

$$|(g_2(z) + P_2(z)) - (g_1(z) + P_1(z))| < 1 \quad \forall z \in \overline{U}_1. \tag{3.3}$$

Angenommen, für $\nu \geq 2$ gäbe es ein $g_\nu \in \mathcal{O}(D)$ und $g_{\nu-1} \in \mathcal{O}(D)$, so dass $g_{\nu-1} + P_{\nu-1} - P_\nu$ holomorph auf einer Umgebung von $\overline{U}_{\nu-1}$ ist und

$$|(g_\nu(z) + P_\nu(z)) - (g_{\nu-1}(z) + P_{\nu-1}(z))| < \frac{1}{2^{\nu-2}} \quad \forall z \in \overline{U}_{\nu-1}. \tag{3.4}$$

Da $g_\nu + P_\nu - P_{\nu+1}$ holomorph auf einer Umgebung von $\overline{U}_\nu$ ist (da alle Polstellen von $g_\nu + P_\nu - P_{\nu+1}$ auf $\overline{U}_{\nu+1} \backslash \overline{U}_\nu$ liegen), existiert nach dem Satz von Runge ein $g_{\nu+1} \in \mathcal{O}(D)$, so dass

$$|(g_{\nu+1}(z) + P_{\nu+1}(z)) - (g_\nu(z) + P_\nu(z))| < \frac{1}{2^{\nu-1}} \quad \forall z \in \overline{U}_\nu. \tag{3.5}$$

Somit haben wir induktiv bewiesen, dass es eine Funktionenfolge $(g_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ gibt, so dass $g_\nu \in \mathcal{O}(D)$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ und

$$|(g_{\nu+1}(z) + P_{\nu+1}(z)) - (g_\nu(z) + P_\nu(z))| < \frac{1}{2^{\nu-1}} \quad \forall z \in \overline{U}_\nu. \tag{3.6}$$

gilt. Wir definieren nun:

$$\begin{aligned} f(z) &:= (g_1(z) + P_1(z)) + \sum_{\nu=1}^{\infty} ((g_{\nu+1}(z) + P_{\nu+1}(z)) - (g_\nu(z) + P_\nu(z))) && (3.7) \\ &= (g_\lambda(z) + P_\lambda(z)) + \sum_{\nu=\lambda}^{\infty} ((g_{\nu+1}(z) + P_{\nu+1}(z)) - (g_\nu(z) + P_\nu(z))), \; z \in D. && (3.8) \end{aligned}$$

Sei $z' \in D \backslash \{a_n\}_{n=1}^N$ beliebig und $\lambda' \in \mathbb{N}$, so dass $z' \in \overline{U}_{\lambda'}$. Dann gilt nach der Konstruktion von $(g_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ und $(P_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$:

$$\sum_{\nu=\lambda'}^{\infty} |(g_{\nu+1}(z') + P_{\nu+1}(z')) - (g_\nu(z') + P_\nu(z'))| < \sum_{\nu=\lambda'}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu-1}} < +\infty. \tag{3.9}$$

Somit konvergiert auch $\sum_{\nu=\lambda'}^{\infty} ((g_{\nu+1}(z') + P_{\nu+1}(z')) - (g_\nu(z') + P_\nu(z')))$ und damit ist f

eine meromorphe Funktion auf D, wobei $\{a_n\}_{n=1}^N$ die Menge aller Polstellen von f ist. Sei nun $m \in \{1,...,N\}$ beliebig und $\lambda \in \mathbb{N}$, so dass $a_m \in \overline{U}_\lambda$. Wir wählen $R_m > 0$, so dass $\Delta_{2R_m}(a_m) \subseteq D$ und $2R_m < \inf\{|a_m - a_n| : a_n \in \{a_n\}_{n=1}^N \setminus \{a_m\}\}$.
Nun defineren wir:

$$f_m(z) := (g_\lambda(z) + P_\lambda(z) - Q_{a_m}(z)) + \sum_{\nu=\lambda}^{\infty}((g_{\nu+1}(z) + P_{\nu+1}(z)) - (g_\nu(z) + P_\nu(z))). \quad (3.10)$$

f_m ist per Konstruktion holomorph auf $\Delta_{2R_m}(a_m)$ und nach dem Potenzreihenentwicklungssatz [1, Kapitel III, Satz 2.2, S.106] gilt:

$$f_m(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_m^{(j)}(a_m)}{j!}(z - a_m)^j \quad \forall z \in \Delta_{R_m}(a_m). \quad (3.11)$$

Somit lässt sich f auf $K_{0,R_m}(a_m)$ in eine Laurent-Reihe mit Hauptteil Q_{a_m} und Nebenteil $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_m^{(j)}(a_m)}{j!}(z - a_m)^j$ entwickeln.

2.Fall: $D = \hat{\mathbb{C}}$
Hier gilt $N < +\infty$, da es für $N = +\infty$ einen Häufungspunkt der Menge $\{a_n\}_{n=1}^N$ in $\hat{\mathbb{C}}$ gäbe. Wir definieren die meromorphe Funktion

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} Q_{a_n}(z), \quad (3.12)$$

welche die gewünschten Eigenschaften erfüllt.

□

Am Beweis von Satz 3.1 erkennt man, dass man r_n mit $0 \leq r_n \leq R_n$ beliebig wählen kann. Somit können wir folgende Aussage formulieren, die wir für den Beweis des Interpolationssatzes in Kapitel 4 benötigen.

Korollar 3.2
Gegeben seien die gleichen Voraussetzungen wie in Satz 3.1. Dann existiert eine meromorphe Funktion f auf D und für alle $n \in \{1,...,N\}$ existiert ein $R_n > 0$, so dass man f auf $K_{0,R_n}(a_n)$ in eine Laurent-Reihe mit dem Hauptteil Q_{a_n} entwickeln kann.

Im folgenden Beispiel werden wir den Satz von Mittag-Leffler nicht direkt anwenden. Dafür werden wir aber sehen, dass $f(z) = \frac{1}{sin(z)}$ den Satz von Mittag-Leffler für die gegebene diskrete Menge $\{n\pi\}_{n\in\mathbb{Z}}$ und $Q_{n\pi}(z) := (-1)^n \frac{1}{z-n\pi}$ bestätigt.

Beispiel 3.3
Seien $D = \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ und $Q_{n\pi}(z) := (-1)^n \frac{1}{z-n\pi}$ für $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\{n\pi\}_{n\in\mathbb{Z}}$ die Menge der Polstellen von f, wobei die Ordnung jeder Polstelle 1 ist. Sei nun

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) + (-1)^n \left(\frac{1}{z + n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right) \tag{3.13}$$

Dann gilt:

$$\left| \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right| = \left| \frac{z}{n\pi(z - n\pi)} \right| = \frac{|z|}{n^2\pi^2 \left|1 - \frac{z}{n\pi}\right|} \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{|z|}{\pi^2 \left|1 - \frac{|z|}{n\pi}\right|} \cdot \frac{1}{n^2} \tag{3.14}$$

und

$$\left| \frac{1}{z + n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right| = \left| \frac{z}{n\pi(z + n\pi)} \right| = \frac{|z|}{n^2\pi^2 \left|1 + \frac{z}{n\pi}\right|} \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{|z|}{\pi^2 \left|1 - \frac{|z|}{n\pi}\right|} \cdot \frac{1}{n^2}. \tag{3.15}$$

Daraus folgt: g konvergiert absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen $K \subseteq \mathbb{C}$ mit $K \cap \{n\pi\}_{n\in\mathbb{Z}} = \emptyset$. Daher ist g meromorph auf $\mathbb{C}$. Wir definieren folgende Funktion:

$$h(z) := \frac{1}{z} + g(z). \tag{3.16}$$

Mit der absoluten Konvergenz ergibt sich:

$$\begin{aligned}
h(z - \pi) &= \frac{1}{z - \pi} + g(z - \pi) = \frac{1}{z - \pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z - (n+1)\pi} + \frac{1}{z + (n-1)\pi} \right) && (3.17)\\
&= \frac{-1}{z} + \frac{1}{z - \pi} + \frac{1}{z + \pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z - (n+1)\pi} + \frac{1}{z + (n+1)\pi} \right) && (3.18)\\
&= \frac{-1}{z} + \frac{1}{z - \pi} + \frac{1}{z + \pi} - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) && (3.19)\\
&= \frac{-1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) && (3.20)\\
&= -h(z) && (3.21)
\end{aligned}$$

und

$$h(z-2\pi) = \frac{1}{z-2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-(n+2)\pi} + \frac{1}{z+(n-2)\pi} \right) \tag{3.22}$$

$$= \frac{1}{z-2\pi} - \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+\pi} + \frac{1}{z+2\pi} \tag{3.23}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-(n+2)\pi} + \frac{1}{z+(n+2)\pi} \right) \tag{3.24}$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi} \right) \tag{3.25}$$

$$= h(z). \tag{3.26}$$

h ist also 2π-periodisch und die Funktion

$$F(z) = \frac{1}{\sin(z)} - h(z) \tag{3.27}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C}$ und ebenfalls 2π-periodisch. Für $x + iy = z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\frac{1}{|\sin(z)|} = \frac{2}{|e^{ix-y} - e^{-ix+y}|} \leq \frac{2}{||e^{ix-y}| - |e^{-x+y}||} \tag{3.28}$$

$$= \frac{2}{|e^{-y} - e^{y}|} \to 0, \ |y| \mapsto +\infty. \tag{3.29}$$

h lässt sich darstellen als

$$h(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}. \tag{3.30}$$

Wir definieren die Partialsummen:

$$s_m(z) := \sum_{n=1}^{2m} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} = \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{-2z}{z^2 - (2n-1)^2\pi^2} + \frac{2z}{z^2 - 4n^2\pi^2} \right) \tag{3.31}$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \frac{2\pi^2 z(4n-1)}{(z^2 - (2n-1)^2\pi^2)(z^2 - 4n^2\pi^2)}. \tag{3.32}$$

Nun möchten wir zeigen, dass es für $0 \leq x \leq 2\pi$ und $|y| \geq 4\pi$ reelle Konstanten $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$ gibt, so dass:

$$|s_m(z)| \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{c_2 |y| n}{(y^2 + c_1 n^2)^2} \quad \forall m \in \mathbb{N} \tag{3.33}$$

mit $x + iy = z \in \mathbb{C}$, $0 \leq x \leq 2\pi$, $|y| \geq 4\pi$. Es gilt:

$$|2\pi^2 z(4n-1)| = 2\pi^2(4n-1)|z| = 2\pi^2(4n-1)\sqrt{x^2+y^2} \tag{3.34}$$
$$\leq 2\pi^2(4n-1)\sqrt{2y^2} \leq 2\sqrt{2}\pi^2 4n|y| = 8\sqrt{2}\pi^2 n|y| \tag{3.35}$$

Damit gilt $|2\pi^2 z(4n-1)| \leq c_2|y|n$ für $c_2 = 8\sqrt{2}\pi^2$. Um $\left|z^2 - (2n-1)^2\pi^2\right| \geq \left|y^2 + c_1 n^2\right|$ zu zeigen, betrachten wir zunächst $n = 1$:

$$\left|z^2 - \pi^2\right| = \left|x^2 - y^2 + 2ixy - \pi^2\right| = \sqrt{(y^2+\pi^2-x^2)^2 + (2xy)^2} \tag{3.36}$$
$$= \sqrt{y^4 + 2y^2\pi^2 + \pi^4 + 2x^2(y^2-\pi^2) + x^4} \tag{3.37}$$
$$\geq \sqrt{y^4 + 2y^2\pi^2 + \pi^4} = (y^2 + \pi^2) \tag{3.38}$$

Für $n \geq 2$ gilt:

$$|z^2 - (2n-1)^2\pi^2| = \sqrt{(y^2 - x^2 + (2n-1)^2\pi^2)^2 + (2xy)^2} \tag{3.39}$$
$$\geq |\underbrace{y^2 - x^2 + (2n-1)^2\pi^2}_{\geq 0}| \geq (y^2 - 4\pi^2 + (4n^2 - 4n + 1)\pi^2) \tag{3.40}$$
$$= y^2 + \underbrace{(4n^2 - 4n - 3)}_{\geq n^2 \ \forall n \geq 2}\pi^2 \geq y^2 + n^2\pi^2 \tag{3.41}$$

Zudem gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$|z^2 - 4n^2\pi^2| = |x^2 - y^2 + 2ixy - (2n)^2\pi^2| = ((\underbrace{y^2 - x^2}_{\geq 0} + (2n)^2\pi^2)^2 + (2xy)^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.42}$$
$$\geq ((y^2 - x^2 + (2n-1)^2\pi^2)^2 + (2xy)^2)^{\frac{1}{2}} = |z^2 - (2n-1)^2\pi^2| \tag{3.43}$$

Damit gilt $(y^2 + c_1 n^2)^2 \leq |(z^2 - (2n-1)^2\pi^2)(z^2 - 4n^2\pi^2)|$ für $c_1 = \pi^2$. Somit haben wir die Ungleichung (3.33) bewiesen. Wir definieren nun die reellwertige Funktion

$$\Phi(t) = \frac{c_2|y|t}{(y^2 + c_1 t^2)^2} \geq 0, \text{ wobei } t \geq 0. \tag{3.44}$$

Die Ableitung von Φ ist

$$\Phi'(t) = \frac{c_2|y|(y^2 + c_1t^2)^2 - 4c_1t^2c_2|y|(y^2 + c_1t^2)}{(y^2 + c_1t^2)^4} \tag{3.45}$$
$$= \frac{-c_2|y|(3c_1t^2 - y^2)}{(c_1t^2 + y^2)^3}. \tag{3.46}$$

Somit ist die Maximumstelle von Φ offensichtlich $t_{max} = \frac{|y|}{\sqrt{3c_1}}$ und das Maximum beträgt $\frac{9c_2}{16\sqrt{3c_1}y^2}$. Da $\frac{|y|}{\sqrt{3c_1}}$ die einzige Nullstelle der Ableitung von $\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ ist, ist Φ streng monoton steigend auf $[0, \frac{|y|}{\sqrt{3c_1}})$ und streng monoton fallend auf $(\frac{|y|}{\sqrt{3c_1}}, +\infty)$ und somit erhalten wir folgende Ungleichung:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{c_2|y|n}{(y^2 + c_1 n^2)^2} \leq \int_1^\infty \frac{c_2|y|t}{(y^2 + c_1 t^2)^2} dt + \frac{9c_2}{16\sqrt{3c_1}y^2}. \tag{3.47}$$

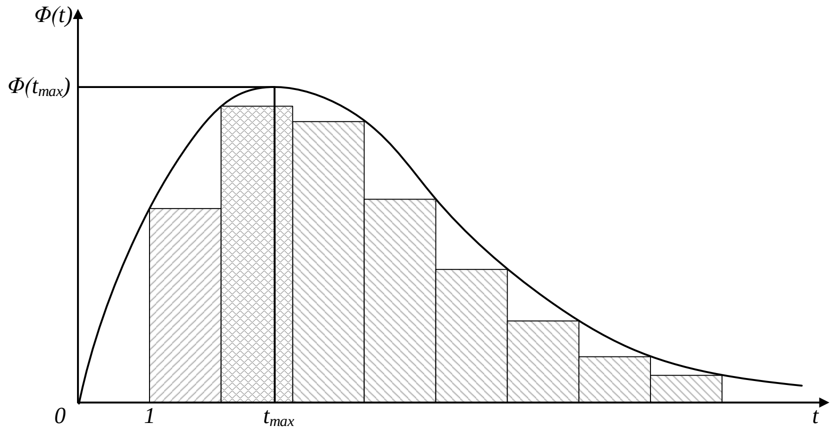

Abbildung 3.1: Die Höhe der einzelnen Rechtecke stellt hierbei die Summanden der Reihe in (3.47) dar. Die Rechtecke auf der rechten Seite von t_{max} wurden hierbei um eine Einheit nach links „verschoben“(vgl. [2, S.188]).

Es gilt:

$$\int \frac{c_2|y|t}{(y^2 + c_1 t^2)^2} dt \underset{u := y^2 + c_1 t^2}{\overset{\text{Substituiere}}{=}} \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{c_2|y|}{2c_1} = \frac{-c_2|y|}{2c_1 u} \overset{\text{Rücksubst.}}{=} \frac{-c_2|y|}{2c_1(y^2 + c_1 t^2)}. \tag{3.48}$$

(3.49)

Somit erhalten wir

$$\int_1^\infty \frac{c_2|y|t}{(y^2 + c_1 t^2)^2} dt = \frac{c_2|y|}{2c_1(y^2 + c_1)}. \tag{3.50}$$

Daraus folgt:

$$|s_m(z)| \le \frac{c_2|y|}{2c_1(c_1+y^2)} + \frac{9c_2}{16\sqrt{3c_1}y^2} \le \frac{c_2}{2c_1|y|} + \frac{9c_2}{16\sqrt{3c_1}|y|} = \frac{16\sqrt{3c_1}c_2|y| + 18c_1c_2|y|}{32c_1\sqrt{3c_1}y^2} \tag{3.51}$$

$$= \frac{8\sqrt{3c_1}c_2 + 9c_1c_2}{16c_1\sqrt{3c_1}} \cdot \frac{1}{|y|}. \tag{3.52}$$

Damit haben wir die Existenz einer reellen Konstante $c_3 > 0$ gezeigt, so dass

$$|s_m(z)| \le \frac{c_3}{|y|} \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.53}$$

Da $|g(z)| = |\lim_{m\to\infty} s_m(z)| \le \frac{c_3}{|y|}$, erhalten wir:

$$|h(z)| \le \left|\frac{1}{z}\right| + |g(z)| \le \frac{1+c_3}{|y|} \text{ mit } z = x+iy, 0 \le x \le 2\pi, |y| \ge 4\pi. \tag{3.54}$$

Damit folgt aus (3.28) und (3.54), dass $F(z)$ beschränkt und holomorph auf $\{x+iy = z \in \mathbb{C} : 0 \le x \le 2\pi\}$ ist und aufgrund der 2π–Periodizität, dass $F(z)$ auch beschränkt und holomorph auf $\mathbb{C}$ ist. Nach dem Satz von Liouville [1, Kapitel II, Satz 3.7, S.91] ist $F(z)$ konstant und mit (3.28) und (3.54) erhalten wir

$$\lim_{|y|\to\infty} F(iy) = 0 \text{ und somit } F \equiv 0. \tag{3.55}$$

Damit ergibt sich für $\frac{1}{\sin z}$ folgende Identität:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} \tag{3.56}$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z+n\pi} - \frac{1}{n\pi}\right). \tag{3.57}$$

Sei nun $m\pi$ für $m \in \mathbb{N}$ eine beliebige Polstelle von $\frac{1}{\sin z}$.
Für $m = 0$ ist dann

$$g_0(z) := \sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z+n\pi} - \frac{1}{n\pi}\right) \tag{3.58}$$

nach der Konvergenz der Summe holomorph auf $\Delta_\pi(0)$ und nach dem Potenzreihenentwicklungssatz [1, Kapitel III, Satz 2.2, S.106] gilt:

$$g_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_0^{(k)}(0)}{k!} z^k \quad \forall z \in \Delta_{\frac{\pi}{2}}(0). \tag{3.59}$$

Demnach kann man $\frac{1}{\sin z}$ auf $K_{0,\frac{\pi}{2}}(0)$ in eine Laurent-Reihe mit Hauptteil $\frac{1}{z}$ und Nebenteil $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_0^{(k)}(0)}{k!} z^k$ entwickeln.

Für $m \neq 0$ ist dann

$$g_m(z) := \frac{1}{z} - (-1)^m \frac{1}{z - m\pi} + \sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z + n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right) \tag{3.60}$$

nach der Konvergenz der Summe holomorph auf $\Delta_\pi(m\pi)$ und nach dem Potenzreihenentwicklungssatz [1, Kapitel III, Satz 2.2, S.106] gilt:

$$g_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_m^{(k)}(m\pi)}{k!} z^k \quad \forall z \in \Delta_{\frac{\pi}{2}}(m\pi). \tag{3.61}$$

Demnach kann man $\frac{1}{\sin z}$ auf $K_{0,\frac{\pi}{2}}(m\pi)$ in eine Laurent-Reihe mit Hauptteil $(-1)^m \frac{1}{z-m\pi}$ und Nebenteil $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_m^{(k)}(m\pi)}{k!} z^k$ entwickeln.

3.2 Der Produktsatz von Weierstraß

Auch hier werden wir den Satz von Runge benutzen, um den Produktsatz von Weierstraß für beliebige Gebiete $D \subseteq \mathbb{C}$ zu beweisen, welcher eine verallgemeinerte Version der Theorie war, die Weierstraß im Jahr 1876 entwickelt hat und bei der er den Satz nur für den Fall $D = \mathbb{C}$ bewiesen hat (vgl. [3, Kapitel 3, S.81]). Die Tatsache, dass man für beliebige diskrete Mengen in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ konstruieren konnte, für die diese gegebene diskrete Menge der Nullstellenmenge der Funktion entsprach, veränderte die Denkweise über die Funktionentheorie maßgeblich (vgl. [3, Kapitel 3, S.82]).
Um den Produktsatz von Weierstraß beweisen zu können, müssen wir zunächst die Begriffe des Elementargebietes und des holomorphen Zweigs definieren, einige Eigenschaften von holomorphen Zweigen beweisen und zeigen, dass die Mengendifferenz von $\hat{\mathbb{C}}$ und der Verbindungsstrecke von zwei Punkten in $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist.

Definition 3.4
Ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt Elementargebiet, falls jede holomorphe Funktion auf D eine Stammfunktion besitzt.

Definition 3.5
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Eine stetige Funktion $g : D \to \mathbb{C}$ mit

$$e^{g(z)} = f(z) \quad \forall z \in D \tag{3.62}$$

heißt Zweig von log f.

Bemerkung: Eine solche Funktion g ist immer holomorph auf D (vgl. [5, Kapite IV §2, S.101]). Für den Beweis vom Produktsatz von Weierstraß brauchen wir diese Eigenschaft aber nur unter der Voraussetzung, dass D ein Elementargebiet ist. Dies folgt aus dem nächsten Lemma, welches auf [5, Kapitel IV §2, S.101-102] basiert.

Lemma 3.6
Sei D ein Elementargebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann exisitert ein holomorpher Zweig von log f.

Beweis.
Da $\frac{f'}{f}$ holomorph auf D ist, existiert eine Stammfunktion g von $\frac{f'}{f}$ auf dem Elementargebiet D. Dann gilt:

$$(f(z)e^{-g(z)})' = f'(z)e^{-g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot f(z)e^{-g(z)} = 0 \quad \forall z \in D. \tag{3.63}$$

Daraus folgt:

$$f(z)e^{-g(z)} = e^c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}, \tag{3.64}$$

da $f(z) \neq 0 \neq e^{-g(z)}$ für alle $z \in D$. Demnach gilt:

$$f(z) = e^{g(z)+c} \quad \forall z \in D. \tag{3.65}$$

Damit ist die Funktion $g(z) + c$ nach Definition 3.5 ein Zweig von log f und auch holomorph, da sie eine Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$ auf dem Elementargebiet D ist. □

Wie bereits erwähnt müssen wir zeigen, dass $\hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{ab}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, wobei $\overline{ab} := \{\lambda a + (1-\lambda)b : \lambda \in [0,1]\}$ die Verbindungsstrecke zwischen a und b ist. Unser Ansatz dafür ist folgender: Wir definieren eine Möbiustransformation, welche $\hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{ab}$ biholomorph auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}$ abbildet, wobei $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x + iy = z \in \mathbb{C} : x \geq 0, y = 0\}$.
Ähnlich wie in [1, Kapitel 1, S.47] bilden wir dann die konvexe Menge $R := \{x + iy = z : x \in \mathbb{R}, y \in (0, 2\pi)\}$ homöomorph auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}$ ab und benutzen dann [3, Kapitel 8, Satz 8.5 & 8.6, S.169-170], um den Beweis zu vervollständigen.
Damit wird es für uns keine Schwierigkeit sein, Lemma 3.7 (ii) zu beweisen, welches eine für uns wichtige Aussage über die Existenz von holomorphen Zweigen unter bestimmten Voraussetzungen darstellt. In Lemma 3.7 (iii) & (iv) betrachten wir einige Rechenregeln für holomorphe Zweige, welche ebenfalls leicht zu beweisen sind.

Lemma 3.7
Seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $\overline{ab} := \{\lambda a + (1-\lambda)b : \lambda \in [0,1]\}$ die Verbindungsstrecke zwischen a und b. Dann gilt:

(i) $\hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{ab}$ ist einfach zusammenhängend.

(ii) Für $f : \hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{ab} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{ab}$ existiert ein holomorpher Zweig g von log f.

(iii) Sei $l \in \mathbb{N}$. Für jedes $k \in \{1,...,l\}$ sei eine holomorphe Funktion $f_k : U_k \to \mathbb{C}$ gegeben mit $f_k(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_k$, wobei $U_k \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet sei mit $\bigcap_{k=1}^{l} U_k \neq \emptyset$. Sei weiterhin für alle $k \in \{1,...,l\}$ ein holomorpher Zweig g_k von log f_k gegeben. Für $U := \bigcap_{k=1}^{l} U_k$ ist $g \equiv \sum_{k=1}^{l} g_k|_U$ dann ein holomorpher Zweig von log $(\prod_{k=1}^{l} f_k|_U)$.

(iv) Sei $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, $n \in \mathbb{N}$, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in U$ und es existiere ein holomorpher Zweig $g : U \to \mathbb{C}$ von log f. Dann ist $n \cdot g$ ein holomorpher Zweig von log f^n.

Beweis.
(i) Wir wollen zunächst zeigen, dass es eine Möbiustransformation gibt, die $\hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{ab}$ biholomorph auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}$ abbildet, wobei hier $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x + iy = z : x \geq 0, y = 0\}$ ist. Für $z' := \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ definieren wir das Doppelverhältnis bzw. die Möbiustransformation

$$\varphi(z) = \frac{\frac{z-a}{z-b}}{\frac{z'-a}{z'-b}} = \frac{z-a}{-z+b}. \tag{3.66}$$

Für $\lambda \in [0,1]$ sei nun $z_0 := \lambda a + (1-\lambda)b$. Dann gilt:

$$\varphi(z_0) = \frac{\lambda a + (1-\lambda)b - a}{-\lambda a - (1-\lambda)b + b} = \frac{-a+b}{-\lambda a + \lambda b} - 1 \tag{3.67}$$

$$= \frac{1}{\lambda} - 1 \in [0, +\infty]. \tag{3.68}$$

Damit haben wir gezeigt, dass jedes Element der Verbindungsstrecke von a und b auf ein Element aus $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ abbildet.
Sei $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ beliebig. Dann gilt:

$$\varphi(z) = \frac{z-a}{-z+b} = \mu \tag{3.69}$$

$$\Leftrightarrow z - a = -\mu z + \mu b \tag{3.70}$$

$$\Leftrightarrow (\mu + 1)z = a + \mu b \tag{3.71}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{\mu+1} a + \frac{\mu}{\mu+1} b. \tag{3.72}$$

Daraus folgt, dass das Urbild von $\{\mu\}$ auf der Verbindungsstrecke von a und b liegt. Damit haben wir die Existenz einer Möbiustransformation Φ mit Funktionsvorschrift $z \mapsto \varphi(z)$ bewiesen, welche $\hat{\mathbb{C}} \backslash \overline{ab}$ biholomorph auf $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\geq 0}$ abbildet.
Es bleibt zu zeigen: $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist das homöomorphe Bild einer konvexen Menge. Dies beweisen wir, indem wir zeigen, dass die Exponentialfunktion die konvexe Menge

$$R = \{x + iy = z \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, y \in (0, 2\pi)\} \tag{3.73}$$

homöomorph auf $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\geq 0}$ abbildet.
Da $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$ stetig ist, ist auch $\exp|_R : R \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$ stetig.
Angenommen, es gäbe $\omega, z \in R$, so dass $\exp|_R(\omega) = \exp|_R(z)$. Dann folgt aus [1, Kapitel I, Bem. 2.10, S.20]:

$$z = \omega + 2\pi i k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}. \tag{3.74}$$

Offensichtlich existiert kein $z \in R$, so dass $z - 2\pi i k \in R$ für ein $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ und somit gilt $z = \omega$ und $\exp|_R : R \to \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist injektiv.
Da $\exp(R) = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt, ist $\exp|_R$ auch surjektiv und somit bijektiv.
Nach dem Satz für implizite Funktionen [1, Kapitel I, Satz 5.7, S.46] existiert eine stetige Umkehrabbildung von $\exp|_R$.
Damit haben wir gezeigt, dass $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\geq 0}$ das homöomorphe Bild einer konvexen Menge ist.

Nach [3, Kapitel 8, Satz 8.5 & 8.6, S.169-170] ist also jeder geschlossene Weg in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}$ nullhomotop. Da wir außerdem die Existenz einer Möbiustransformation gezeigt haben, die $\hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{ab}$ biholomorph auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}$ abbildet, ist auch jeder geschlossene Weg in $\hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{ab}$ nullhomotop und somit ist $\hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{ab}$ per Definition einfach zusammenhängend.

(ii) Da wir nun gezeigt haben, dass $\hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{ab}$ einfach zusammenhängend ist, folgt mit [1, Kapitel IV, A7 Bem., S.240], dass für jede geschlossene Kurve α in $\hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{ab}$ und jede holomorphe Funktion $f : \hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{ab} \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\int_{\alpha} f(z)dz = 0. \tag{3.75}$$

Damit hat nach [1, Kapitel II, Satz 2.4, S.72] jede holomorphe Funktion f auf $\hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{ab}$ eine Stammfunktion in $\hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{ab}$ und somit ist $\hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{ab}$ ein Elementargebiet. Für $f \in \mathcal{O}(\hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{ab})$ mit $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{ab}$ folgt somit aus Lemma 3.6 die Existenz eines holomorphen Zweigs von log f.

(iii) Es gilt

$$e^{g(z)} = \prod_{k=1}^{l} e^{g_k|_U(z)} = \prod_{k=1}^{l} f_k|_U(z) \quad \forall z \in U. \tag{3.76}$$

Damit ist g nach Definition 3.5 ein holomorpher Zweig von log $\prod_{k=1}^{l} f_k|_U$.

(iv) Es gilt

$$e^{n \cdot g(z)} = e^{g(z)^n} = f^n(z) \quad \forall z \in U. \tag{3.77}$$

Damit ist ng nach Definition 3.5 ein holomorpher Zweig von log f^n.

□

Sowohl der Beweis als auch die Aussage des Produktsatzes von Weierstraß sind an [2, Kapitel 7.2, S.189-190] angelehnt.

Satz 3.8 (Produktsatz von Weierstraß)
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\{a_n\}_{n=1}^N \subseteq D$ eine diskrete Menge mit $N \leq +\infty$ und $\{\nu_n\}_{n=1}^N$ eine Menge mit $\nu_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \{1,\dots,N\}$.
Dann existiert eine holomorphe Funktion f auf D, für die $\{a_n\}_{n=1}^N$ die Nullstellenmenge von f und ν_n die Ordnung der Nullstelle a_n für alle $n \in \{1,\dots,N\}$ ist.

Beweis.
Für $N < +\infty$ ist

$$\prod_{n=1}^{N} (z - a_n)^{\nu_n} \tag{3.78}$$

eine holomorphe Funktion mit den gewünschten Eigenschaften. Daher betrachten wir nun den Fall $N = +\infty$. Nach Satz 2.9 existiert eine Runge-Ausschöpfung $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ von D.
Nach der Konstruktion von $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ im Beweis von Satz 2.9 gilt:

Alle Zusammenhangskomponenten von $D\backslash\overline{U}_n$ sind nicht relativ kompakt in D.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir nun:

$$P_n(z) = \prod_{j\in\mathbb{N}:\, a_j \in \overline{U}_n} (z - a_j)^{\nu_j}. \tag{3.79}$$

Für jedes $a_j \in \overline{U}_{n+1}\backslash\overline{U}_n$ wählen wir ein $b_j \in D\backslash\overline{U}_{n+1}$, so dass b_j in der gleichen Zusammenhangskomponente V_j von $D\backslash\overline{U}_n$ ist, wie a_j.
Dann existieren $z_0, z_1, \dots, z_l \in V_j$ mit $z_0 = a_j$ und $z_l = b_j$, so dass die Kurve

$$C = \bigcup_{k=1}^{l} \overline{z_{k-1}z_k} \tag{3.80}$$

in V_j liegt. Die Funktion $\frac{z-z_{k-1}}{z-z_k}$ ist holomorph und nullstellenfrei auf $\hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{z_{k-1}z_k}$ für alle $k \in \{1,\dots,l\}$ und somit existiert nach Lemma 3.7 (ii) ein holomorpher Zweig von log $\frac{z-z_{k-1}}{z-z_k}$ auf $\hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{z_{k-1}z_k}$. Man beachte hierbei: $\frac{z-a_j}{z-b_j} = \prod_{k=1}^{l} \frac{z-z_{k-1}}{z-z_k}$.
Demnach existiert nach Lemma 3.7 (iii) ein holomorpher Zweig von log $\frac{z-a_j}{z-b_j}$ auf einer Umgebung von $\overline{U}_n$.

Sei $n = 1$ und $f_1(z) := P_1(z)$. Wir definieren:

$$\hat{g}_2(z) = P_2(z)\left(\prod_{j\in\mathbb{N}:\,a_j\in\overline{U}_2\setminus\overline{U}_1}\frac{1}{(z-b_j)^{\nu_j}}\right)\cdot\frac{1}{f_1(z)} \tag{3.81}$$

$$= \prod_{j\in\mathbb{N}:\,a_j\in\overline{U}_2\setminus\overline{U}_1}\left(\frac{z-a_j}{z-b_j}\right)^{\nu_j}. \tag{3.82}$$

Nach Lemma 3.7 (iii) und (iv) gibt es einen Zweig g_2 von log $\hat{g}_2(z)$ auf einer Umgebung von $\overline{U}_1$. Nach dem Satz von Runge gibt es für $\varepsilon_2 > 0$ ein $h_2 \in \mathcal{O}(D)$, so dass:

$$|g_2(z) + h_2(z)| < \varepsilon_2 \quad \forall z \in \overline{U}_1. \tag{3.83}$$

Wir definieren:

$$f_2(z) = P_2(z)\left(\prod_{j\in\mathbb{N}:\,a_j\in\overline{U}_2\setminus\overline{U}_1}\frac{1}{(z-b_j)^{\nu_j}}\right)\cdot e^{h_2(z)} \tag{3.84}$$

Dann gilt:

$$\frac{f_2(z)}{f_1(z)} = \hat{g}_2(z)e^{h_2(z)} = e^{g_2(z)}e^{h_2(z)} = e^{g_2(z)+h_2(z)}. \tag{3.85}$$

Somit ist $g_2 + h_2$ ein Zweig von log $\frac{f_2}{f_1}$, welcher holomorph auf einer Umgebung von $\overline{U}_1$ ist und

$$|g_2(z) + h_2(z)| < \varepsilon_2 := \frac{1}{2}. \tag{3.86}$$

erfüllt.
Durch Wiederholung dieses Prozesses erhalten wir holomorphe Funktionen f_n und g_n auf einer Umgebung von $\overline{U}_{n-1}$ und $h_n \in \mathcal{O}(D)$ für $n \geq 2$, so dass:

(i) $0 \neq \frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)} \neq +\infty$ für alle $z \in \overline{U}_{n-1}$

(ii) $g_n + h_n$ ist ein holomorpher Zweig von log $\frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)}$ auf einer Umgebung von $\overline{U}_{n-1}$ und es gilt:

$$|g_n(z) + h_n(z)| < \frac{1}{2^{n-1}} =: \varepsilon_n \quad \forall z \in \overline{U}_{n-1}. \tag{3.87}$$

Wir definieren nun:

$$f(z) := f_1(z) \prod_{n=2}^{\infty} \frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)} = f_m(z) \prod_{n=m+1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)}. \tag{3.88}$$

Sei $z \in D$ beliebig. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $z \in \overline{U}_m$. Falls $z \in \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, so ist offensichtlich $f(z) = 0$. Für $z \in D \setminus \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gilt:

$$f(z) = f_m(z) \prod_{n=m+1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)} = f_m(z) \prod_{n=m+1}^{\infty} e^{g_n(z)+h_n(z)} \tag{3.89}$$

$$= f_m(z) \exp\left(\sum_{n=m+1}^{\infty} g_n(z) + h_n(z) \right), \tag{3.90}$$

wobei

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |g_n(z) + h_n(z)| < \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{m-1}} < +\infty, \tag{3.91}$$

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(g_n(z) + h_n(z)\right) = 1. \tag{3.92}$$

Somit konvergiert das Produkt $\prod_{n=m+1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)}$ nach [6, Kapitel VII, HS 1 & 2, S. 194] absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von D und f ist eine holomorphe Funktion auf D mit Nullstellenmenge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, wobei ν_n für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle a_n ist.

□

Wie auch beim Beispiel zum Satz von Mittag-Leffler betrachten wir hier ein Beispiel, bei dem wir den Produktsatz von Weierstraß zwar nicht direkt anwenden, aber den Satz bestätigen. Dieses Beispiel basiert auf [3, Kapitel 4, S.98]

Beispiel 3.9

Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine diskrete Menge in $\Delta_1(0)$ und $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Menge in $\mathbb{N}$ mit

$$a_n \neq a_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } n \neq m \tag{3.93}$$

und

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(1 - |a_n|) < +\infty. \tag{3.94}$$

Dann ist

$$f(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{z - a_n}{z - \frac{1}{\overline{a_n}}} \right)^{\nu_n} \tag{3.95}$$

eine holomorphe Funktion auf jedem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}\backslash S$, wobei $S := \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{\frac{1}{\overline{a_k}}\}}$. Insbesondere liegen alle Häufungspunkte von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in S und somit ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auch diskret in D. Dabei ist a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Nullstelle von f mit der Ordnung ν_n.
Um unsere Behauptung zu beweisen, zeigen wir zunächst:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n \left| a_n - \frac{1}{\overline{a_n}} \right| < +\infty. \tag{3.96}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \nu_n \left| a_n - \frac{1}{\overline{a_n}} \right| &= \frac{\nu_n}{|\overline{a_n}|} |1 - a_n \overline{a_n}| = \frac{\nu_n}{|\overline{a_n}|} (1 - |a_n|^2) & (3.97) \\ &= \frac{\nu_n}{|\overline{a_n}|} (1 - |a_n|)(1 + |a_n|) & (3.98) \\ &\leq \frac{2\nu_n}{m} (1 - |a_n|)) & (3.99) \end{aligned}$$

mit $m := \min\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Damit folgt zusammen mit (3.94), dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n |a_n - \frac{1}{\overline{a_n}}| < +\infty$ gilt. Sei K eine beliebige kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}\backslash S$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| z - \frac{1}{\overline{a_n}} \right| \geq d\left(K, \frac{1}{\overline{a_n}} \right) \geq d(K, S) > 0 \quad \forall z \in K, \frac{1}{\overline{a_n}} \in S. \tag{3.100}$$

und damit erhalten wir:

$$\left| \frac{a_n - \frac{1}{\overline{a_n}}}{z - \frac{1}{\overline{a_n}}} \right| \leq r \left| a_n - \frac{1}{\overline{a_n}} \right| \quad \forall z \in K, \frac{1}{\overline{a_n}} \in S \tag{3.101}$$

mit $r := \frac{1}{d(K,S)}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left| \frac{z - a_n}{z - \frac{1}{\overline{a_n}}} - 1 \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left| \frac{z - \frac{1}{\overline{a_n}}}{z - \frac{1}{\overline{a_n}}} - \frac{z - a_n}{z - \frac{1}{\overline{a_n}}} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left| \frac{a_n - \frac{1}{\overline{a_n}}}{z - \frac{1}{\overline{a_n}}} \right| & (3.102) \\ \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n r \left| a_n - \frac{1}{\overline{a_n}} \right| &< +\infty, \text{ da } r < +\infty. & (3.103) \end{aligned}$$

Die Konvergenz von $f(z)$ auf beliebigen kompakten Teilmengen $K \subseteq \mathbb{C}\backslash S$ ist nach [6, Kapitel VII, HS 1 & 2, S. 194] bewiesen. Somit ist f holomorph auf D und erfüllt die gewünschten Eigenschaften.

Das Produkt in (3.95) ist bis auf Normierung ein sogenanntes Blaschke-Produkt (vgl. [3, Kapitel 4, S.103]). Mit unserem Beispiel 3.9 haben wir also gezeigt, wie man bei einer gegebenen diskreten Menge in $\Delta_1(0)$ mit der Eigenschaft (3.94) eine in $\mathbb{C}\backslash S$ holomorphe Funktion konstruiert, deren Nullstellenmenge die gegebene diskrete Menge ist.

4 Folgerungen aus dem Satz von Mittag-Leffler und dem Produktsatz von Weierstraß

Die beiden Sätze und deren Beweise in Kapitel 4 sind in Anlehnung an [2, Kapitel 7.2, S.191-192].

4.1 Satz über maximale Existenzgebiete

Für diesen Abschnitt der Arbeit müssen wir zunächst die Begriffe der analytischen Fortsetzung, des natürlichen Randes und des maximalen Existenzgebietes einer holomorphen Funktion definieren.

Definition 4.1 (i) Seien $D, D' \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ Gebiete mit $D \cap D' \neq \varnothing$ und f eine holomorphe Funktion auf D. Falls eine holomorphe Funktion g auf D' existiert, so dass $f \equiv g$ auf $D \cap D'$, so definieren wir die Funktion $\tilde{f}$, so dass $\tilde{f} = f$ auf D und $\tilde{f} = g$ auf D'. Wir nennen $\tilde{f}$ eine analytische Fortsetzung der Funktion f von D auf $D \cup D'$.

(ii) Sei f holomorph auf D. Falls f nicht von D auf eine Umgebung von D analytisch fortgesetzt werden kann, so heißt ∂D der natürliche Rand von f und D das maximale Existenzgebiet von f.

Wir wollen nun die fundamentale Frage beantworten, ob jedes Gebiet in $\mathbb{C}$ das maximale Existenzgebiet einer holomorphen Funktion ist. Diese Frage können wir mit der Hilfe des Produktsatzes von Weierstraß beweisen, welchen wir wiederum mit dem Satz von Runge bewiesen haben. Tatsächlich war diese Frage sogar der Grund dafür, warum Carl Runge an seinem Approximationssatz arbeitete (vgl. [3, Kapitel 13, S.290]). Den Beweis dafür, dass jedes Gebiet in $\mathbb{C}$ ein maximales Existenzgebiet ist, veröffentlichte er ebenfalls im Jahre 1885 (vgl. [3, Kapitel 5, S.122]).

Satz 4.2
Für jedes Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ existiert eine holomorphe Funktion f auf D, so dass D das maximale Existenzgebiet von f ist.

Beweis.
Für $n \in \mathbb{N}$ und $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$ definieren wir:

$$D_n := \left\{ z \in D : d(z, \partial D) > \frac{1}{n} \} \cap \Delta_n(0) \right\}; \tag{4.1}$$

$$E_n(j,k) := \left\{ z = x + iy : \frac{j}{2^n} \leq x \leq \frac{j+1}{2^n},\ \frac{k}{2^n} \leq y \leq \frac{k+1}{2^n} \right\}. \tag{4.2}$$

Für alle $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $E_n(j,k) \cap \partial D_n \neq \varnothing$ sei $z_n(j,k)$ ein Punkt aus $E_n(j,k) \cap \partial D_n$.

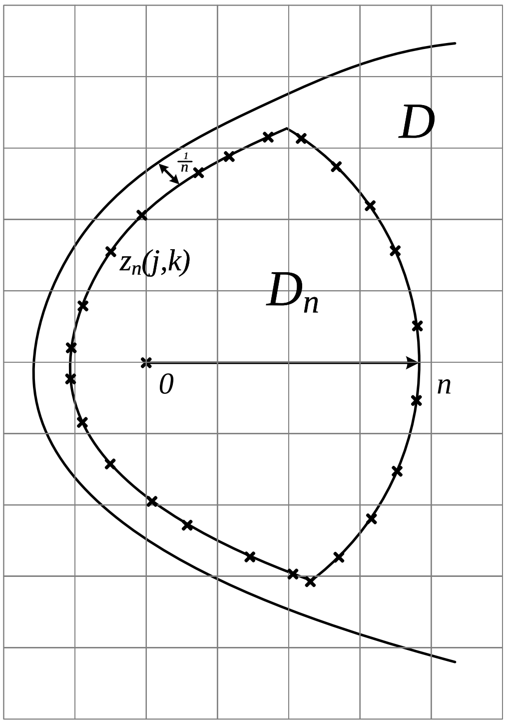

Abbildung 4.1: (vgl. [2, S.191])

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir:

$$k_n := \#\{z_n(j,k) : (j,k) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } z_n(j,k) \in E_n(j,k) \cap \partial D_n\}. \tag{4.3}$$

Man beachte hierbei, dass $k_n < +\infty$ gilt, da $\#\{(j,k) \in \mathbb{Z}^2 : E_n(j,k) \cap \partial D_n \neq \emptyset\} < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei nun für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\{z_{n,i}\}_{i=1}^{k_n} = \{z_n(j,k) : (j,k) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } z_n(j,k) \in E_n(j,k) \cap \partial D_n\}. \tag{4.4}$$

Wir definieren die Folge

$$(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} = z_{1,1}, \ldots, z_{1,k_1}, z_{2,1}, \ldots, z_{2,k_2}, z_{3,1}, \ldots \tag{4.5}$$

Die Menge $\{z_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ ist diskret in D und nach dem Produktsatz von Weierstraß existiert eine holomorphe Funktion f auf D, so dass $\{z_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ die Menge aller Nullstellen von f ist.
Sei nun D' ein beliebiges Gebiet mit $D \subseteq D'$ mit $D \neq D'$. Dann existiert ein $a \in \partial D$ mit $a \in D'$.
Nun zeigen wir, dass a ein Häufungspunkt der Menge $\{z_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ in D' ist.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.6}$$

Sei weiterhin $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$, so dass

$$E_n(j,k) \cap \partial D_n \cap \Delta_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \neq \emptyset. \tag{4.7}$$

Dann gilt für $z \in E_n(j,k)$ und $z' \in E_n(j,k) \cap \partial D_n \cap \Delta_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$:

$$|a - z| \leq |a - z'| + |z' - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{4.8}$$

Daraus folgt:

$$E_n(j,k) \cap \partial D_n \subseteq \Delta_\varepsilon(a). \tag{4.9}$$

Da es ein $\nu \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $z_\nu \in E_n(j,k) \cap \partial D_n$, haben wir gezeigt, dass jede Umgebung von a ein z_ν mit $\nu \in \mathbb{N}$ enthält und somit auch, dass a ein Häufungspunkt von $\{z_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ in D' ist.

Angenommen, für f gäbe es eine analytische Fortsetzung $\tilde{f}$ von D nach D'.
Dann folgt aus dem Identitätssatz [1, Kapitel III, Satz 3.2, S.120], dass $f \equiv 0$.
Dies ist ein Widerspruch, da die Nullstellenmenge von f die Menge $\{z_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ ist. Somit kann f nicht analytisch fortgesetzt werden und D ist das maximale Existenzgebiet von f. □

4.2 Der Interpolationssatz

Nun benutzen wir die Sätze von Mittag-Leffler und Weierstraß, um die Aussage zu beweisen, dass man für eine diskrete Menge $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ und gegebene Menge von Polynomen der Form $P_n(z) = \sum_{j=0}^{d_n} c_{n,j}(z-a_n)^j$ eine holomorphe Funktion f findet, so dass die Potenzreihenentwicklung von f um jeden der Punkte a_n mit $P_n(z)$ anfängt.

Satz 4.3 (Interpolationssatz)
Sei $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ eine diskrete Menge in D mit $a_n \neq a_m$ für $n \neq m$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{d_n} c_{n,j}(z-a_n)^j \tag{4.10}$$

ein beliebiges Polynom mit $d_n \in \mathbb{N}$ und $c_{n,j} \in \mathbb{C}$.
Dann existiert eine holomorphe Funktion f auf D, so dass man f für alle $n \in \mathbb{N}$ auf einer Umgebung U_n von a_n als

$$f(z) = P_n(z) + G_n(z) \tag{4.11}$$

darstellen kann, wobei G_n holomorph auf U_n ist und als einzige Nullstelle a_n hat. Dabei ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle a_n größer als d_n.

Beweis.
Nach dem Produktsatz von Weierstraß existiert eine holomorphe Funktion F auf D, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a_n ist eine Nullstelle von F mit der Ordnung $d_n + 1$.

Sei $r_n > 0$, so dass $\overline{\Delta}_{r_n}(a_n) \subseteq D$ und $r_n < \inf\{|a_n - a_m| : m \in \mathbb{N}\backslash\{n\}\}$. Dann gilt nach dem Potenzreihenentwicklungssatz [1, Kapitel III, Satz 2.2, S.106]:

$$F(z) = \sum_{m=0}^\infty \frac{F^{(m)}(a_n)}{m!}(z-a_n)^m \quad \forall z \in \overline{\Delta}_{r_n}(a_n). \tag{4.12}$$

Da a_n eine Nullstelle der Ordnung $d_n + 1$ ist, gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$F^{(d_n+1)}(a_n) \neq 0, F^{(m)}(a_n) = 0 \quad \forall m \in \{1,...,d_n\}. \tag{4.13}$$

Daraus folgt:

$$F(z) = \sum_{m=d_n+1}^{\infty} \frac{F^{(m)}(a_n)}{m!}(z - a_n)^m \tag{4.14}$$

$$= (z - a_n)^{d_n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{m+d_n+1}(a_n)}{m!}(z - a_n)^m \quad \forall z \in \overline{\Delta}_{r_n}(a_n). \tag{4.15}$$

Da

$$Q_n(z) := \frac{P_n(z)}{(z - a_n)^{d_n+1}} = \sum_{j=0}^{d_n} \frac{c_{n,j}}{(z - a_n)^{d_n+1-j}} \tag{4.16}$$

eine rationale Funktion der Form (3.1) ist, existiert nach Korollar 3.2 eine meromorphe Funktion G auf D, so dass man G auf $K_{0,r_n}(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ in eine Laurent-Reihe mit dem Hauptteil Q_n entwickeln kann.
Wir definieren

$$F_n(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(m+d_n+1)}(a_n)}{m!}(z - a_n)^m. \tag{4.17}$$

F_n ist holomorph auf $\Delta_{r_n}(a_n)$ und hat keine Nullstellen auf $\Delta_{r_n}(a_n)$, da

$$F(z) = (z - a_n)^{d_n+1} F_n(z) \quad \forall z \in \overline{\Delta}_{r_n}(a_n). \tag{4.18}$$

Demnach gilt:

$$H_n := \frac{1}{F_n}(G - Q_n) \text{ ist holomorph auf } \Delta_{r_n}(a_n).$$

Sei nun

$$f(z) = F(z)G(z). \tag{4.19}$$

Die Funktion f ist nach der Konstruktion von F und G offensichtlich holomorph auf D und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(z) = P_n(z) + (z - a_n)^{d_n+1} F_n(z) H_n(z) \quad \forall z \in \Delta_{r_n}(a_n). \tag{4.20}$$

Die Ordnung der Nullstelle a_n von

$$G_n(z) := (z - a_n)^{d_n+1} F_n(z) H_n(z) \tag{4.21}$$

ist größer als d_n. Damit ist die Aussage bewiesen. $\square$

An der Konstruktion erkennen wir, dass G_n in (4.11) das Produkt von $(z - a_n)^{d_n+1}$ und dem Nebenteil einer Laurententwicklung um den Punkt a_n ist. Somit handelt es sich bei $P_n(z) + G_n(z)$ um die eindeutige Potenzreihenentwicklung von f um den Punkt a_n.

Literaturverzeichnis

[1] Eberhard Freitag und Rolf Busam. *Funktionentheorie 1*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 4 edition, 2006.

[2] Junjiro Noguchi. *Translations of Mathematical Monographs: Introduction to Complex Analysis*, volume 168. American Mathematical Society, 1998.

[3] Reinhold Remmert und Georg Schumacher. *Funktionentheorie 2*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3 edition, 2007.

[4] Konrad Königsberger. *Analysis 2*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 5 edition, 2004.

[5] Falko Lorenz. *Funktionentheorie*. Spektrum Akademischer Verlag, 1997.

[6] Wolfgang Fischer und Ingo Lieb. *Funktionentheorie*. Vieweg, 8 edition, 2003.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine Quellen verwendet habe, die nicht im Literaturverzeichnis angegeben sind.
Alle Stellen, welche wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, habe ich dementsprechend kenntlich gemacht.
Diese Arbeit hat bei keiner anderen Prüfungsbehörde in dieser oder einer ähnlichen Form vorgelegen.

(Datum, Unterschrift)