

Bachelorarbeit

Poincarés Satz für diskrete  
Gruppenwirkungen auf der oberen  
Halbebene

Katharina Mersmann  
geb. 02.07.1999

22.07.2019

Betreuung: Prof. Dr. Daniel Greb

Fakultät für Mathematik

Universität Duisburg-Essen



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen hyperbolischer Geometrie</b>	<b>3</b>
2.1	Die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}$ . . . . .	3
2.2	Grundlegende Definitionen und Eigenschaften . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Fuchssche Gruppen</b>	<b>5</b>
3.1	Erzeuger einer Gruppe . . . . .	6
3.2	Klassifikation von Möbiustransformationen . . . . .	6
3.3	Eigenschaften Fuchsscher Gruppen . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Fundamentalpolygone</b>	<b>8</b>
4.1	Definition von Fundamentalpolygonen . . . . .	8
4.2	Das Dirichlet Polygon . . . . .	11
4.3	Konkrete Konstruktion für $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Vorraussetzungen für Poincarés Satz</b>	<b>16</b>
5.1	Seitenpaarende Transformationen und ihre Darstellung . . . . .	17
5.2	Elliptische Kreise . . . . .	20
5.3	Die Ordnung eines elliptischen Kreises . . . . .	23
5.4	Winkelsumme . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Freie Gruppen</b>	<b>26</b>
6.1	Die seitenpaarenden Transformationen generieren eine Fuchs- sche Gruppe . . . . .	27
6.2	Die Definition freier Gruppen . . . . .	28
6.3	Erzeuger und Relationen . . . . .	30
<b>7</b>	<b>Der Satz von Poincaré</b>	<b>30</b>
7.1	Darstellung anhand von Beispielen . . . . .	33
<b>8</b>	<b>Ausblick: Die Riemannsche Fläche <math>\mathbb{H}/\Gamma</math></b>	<b>36</b>
	<b>Literatur</b>	<b>39</b>



## 1 Einleitung

In dieser Bachelorarbeit möchten wir uns dem Zusammenhang von hyperbolischer Geometrie und Gruppentheorie widmen. Genauer gesagt ist es unser Ziel, Fuchssche Gruppen besser zu verstehen und mit Hilfe des Satzes von Poincaré konkret erzeugen zu können.

Fuchssche Gruppen, also diskrete Gruppen von Isometrien der oberen Halbebene, besitzen breite Anwendungsgebiete in verschiedensten Bereichen der Mathematik, einschließlich der Differentialgeometrie, der Zahlentheorie sowie der Darstellungstheorie. Bereits im 19. Jahrhundert widmete sich Henri Poincaré der hyperbolischen Geometrie und erarbeitete auf Grundlage freier Gruppen eine Möglichkeit, mit Hilfe von Fundamentalpolygonen nicht-triviale Fuchssche Gruppen zu erzeugen und konkret darzustellen. Dies ist insbesondere interessant, da die Bahnräume Fuchsscher Gruppen Riemannsche Flächen sind, worauf wir in einem Ausblick eingehen werden.

Beginnen werden wir in Kapitel 2 damit, die Grundlagen der hyperbolischen Geometrie einzuführen. Zur Darstellung hyperbolischer Geometrie gibt es viele verschiedene Modelle. Wir möchten uns in dieser Arbeit aber auf das Modell der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{H}$  beschränken.

Anschließend werden wir uns den Fuchsschen Gruppen widmen und einige relevante Eigenschaften auflisten. Wir setzen hierbei eine gewisse Grundkenntnis über Möbiustransformationen und Fuchssche Gruppen voraus, weshalb wir für nähere Beweise und Ausführungen auf [And99] verweisen möchten. In Kapitel 4 kommen wir dann zur Verbindung beider Bereiche. Hierbei wollen wir den Begriff des Fundamentalpolygons in der hyperbolischen Ebene für eine beliebige Fuchssche Gruppe definieren. Daraufhin werden wir eine allgemeine Konstruktionsweise eines solchen in Form eines Dirichlet-Polygons angeben und beweisen.

Nachdem wir nun also ausgehend von einer Fuchsschen Gruppe ein Fundamentalpolygon erzeugen können, wollen wir uns in den folgenden Kapiteln mit der Umkehrung befassen. Wir werden erläutern, wie man ein gegebenes Fundamentalpolygon mit seitenpaarenden Transformationen ausstatten kann, sodass man elliptische Kreise erhält. Zudem werden wir freie Gruppen einführen, die uns die Möglichkeit geben, Gruppen mit Hilfe von Erzeugern und Relationen anzugeben. Diese Vorarbeit benötigen wir, um in Kapitel 9 den Satz von Poincaré verstehen zu können. Diesen werden wir zwar nicht

rigoros beweisen, aber stattdessen anhand zweier Beispiele nachvollziehen. Um zu zeigen, warum es nützlich ist, beliebige Fuchssche Gruppen erzeugen zu können, werden wir im letzten Kapitel einen Ausblick auf ein Anwendungsgebiet geben und somit die Verbindung zu Riemannschen Flächen herstellen. Genauer gesagt bilden die Bahnräume Fuchsscher Gruppen Riemannsche Flächen, von denen wir unter anderem das Geschlecht mithilfe der Euler Charakteristik studieren können.

Orientiert ist diese Arbeit an drei zentralen Quellen. Der erste Teil orientiert sich hauptsächlich an dem Buch „Hyperbolic Geometry“ von James W. Anderson [And99]. Teil zwei, der sich dem Satz von Poincaré widmet, ist orientiert an dem Vorlesungsscript von Charles Walkden [Wal19], sowie dem Buch von Svetlana Katok [Kat92], das auch die Verbindung zu Riemannschen Flächen thematisiert. Der Beweis des Satzes von Poincaré ist allerdings dem Buch von Alan Beardon [Bea83] entnommen.

## 2 Grundlagen hyperbolischer Geometrie

Um ein generelles Verständnis über die hyperbolische Geometrie und die in dieser Bachelorarbeit benötigten Begrifflichkeiten zu erlangen, beginnen wir einführend mit einigen grundlegenden Definitionen. Diese sind dem Buch von Anderson [And99] entnommen.

### 2.1 Die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}$

Beginnen möchten wir damit, ein Modell der hyperbolischen Geometrie einzuführen, genauer gesagt: die hyperbolische Ebene  $\mathbb{H}$ . Genauere Herleitungen und Beweise können in [And99, Kapitel 3], nachgelesen werden.

Auf der oberen Halbebene  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  können wir eine Länge, sowie die dadurch induzierte Längenmetrik definieren:

Für zwei beliebige Punkte  $x$  und  $y$  in  $\mathbb{H}$  sei  $\Gamma[x, y]$  die Menge der stückweise stetigen Wege  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  mit  $f(a) = x$  und  $f(b) = y$ . Dann definieren wir die Länge eines solchen Weges als

$$l_{\mathbb{H}}(f) = \int_f \frac{1}{\text{Im}(z)} |dz| = \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(f(t))} |f'(t)| dt.$$

Diese Länge auf der oberen Halbebene induziert eine Längenmetrik:

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) := \inf\{l_{\mathbb{H}}(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\}$$

**Definition 2.1** (Die hyperbolische Ebene). Stattet man die obere Halbebene  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  mit der Längenmetrik  $d_{\mathbb{H}}$  aus, erhält man einen metrischen Raum  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ , die *hyperbolische Ebene*.

Da das Infimum in der Definition der Metrik immer angenommen wird, können wir einen *hyperbolischen Geradenabschnitt* als genau diesen kürzesten Weg zwischen zwei Punkten definieren. Eine *hyperbolische Gerade*  $l$  in  $\mathbb{H}$  kann also folgende zwei Formen haben:

1.  $l$  ist eine euklidische Gerade in  $\mathbb{H}$  mit rechtem Winkel zur  $x$ -Achse.
2.  $l$  ist ein euklidischer Halbkreis mit Mittelpunkt auf der  $x$ -Achse, der die  $x$ -Achse in zwei Punkten rechtwinklig schneidet.

## 2.2 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

Nun wollen wir einige topologische Eigenschaften auf  $\mathbb{H}$  einführen.

**Definition 2.2** (konvexe, offene, abgeschlossene und diskrete Teilmengen in  $\mathbb{H}$ ).

- (i) Eine Teilmenge  $Z$  der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{H}$  heißt *konvex* genau dann, wenn für alle  $x, y \in Z$  der hyperbolische Geradenabschnitt von  $x$  nach  $y$  ganz in  $Z$  liegt.
- (ii) Eine Teilmenge  $Z$  von  $\mathbb{H}$  heißt *offen* in  $\mathbb{H}$ , wenn für alle  $z \in Z$  eine offene  $\epsilon$ -Umgebung  $U_\epsilon(z) = \{w \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(z, w) < \epsilon\}$  von  $z$  in  $Z$  enthalten ist.
- (iii) Eine Teilmenge  $Z$  von  $\mathbb{H}$  heißt *abgeschlossen* in  $\mathbb{H}$ , genau dann wenn das Komplement von  $Z$  offen ist.
- (iv) Eine Teilmenge  $Z$  von  $\mathbb{H}$  heißt *diskret*, falls für jedes  $z \in Z$  ein  $\epsilon > 0$  existiert, sodass  $U_\epsilon(z) \cap Z = \{z\}$ .

**Definition 2.3** (Halbebenen in  $\mathbb{H}$ ). Sei  $l$  eine hyperbolische Gerade in  $\mathbb{H}$ . Dann werden die zwei *offenen Halbebenen bestimmt durch  $l$*  definiert als die Zusammenhangskomponenten des Komplements von  $l$ . Die zwei *abgeschlossenen Halbebenen bestimmt durch  $l$* ,  $H_l$ , werden jeweils definiert als die Vereinigung einer offenen Halbebene mit der Geraden  $l$ .

**Definition 2.4** (lokal endlicher Schnitt von Halbebenen). Ein Schnitt von Halbebenen  $\bigcap_{\alpha \in A} H_{l_\alpha}$  heißt *lokal endlich*, wenn für jedes  $z \in \mathbb{H}$  ein  $\epsilon > 0$  existiert, sodass nur endlich viele der Begrenzungsgeraden  $l_\alpha$  die offene hyperbolische Kreisscheibe  $U_\epsilon(z)$  schneiden.

**Definition 2.5** (hyperbolisches Polygon). Ein *hyperbolisches Polygon*  $P$  ist eine abgeschlossene, konvexe Menge in der hyperbolischen Ebene, die als lokal endlicher Schnitt von abgeschlossenen Halbebenen ausgedrückt werden kann.

Der Rand eines hyperbolischen Polygons besteht also aus hyperbolischen Geradenabschnitten. Diese werden wir im Folgenden die *Kanten* des Polygons nennen. Es lassen sich in der hyperbolischen Geometrie nicht nur Polygone, sondern auch Winkel definieren. Diese benötigen wir später zur Definition von Winkelsummen elliptischer Kreise.



**Definition 2.6** (Winkel).

- (i) Seien zwei hyperbolische Geraden  $g_1$  und  $g_2$  in  $\mathbb{H}$  gegeben, die sich im Punkt  $z_0$  schneiden. Dann definieren wir den *Winkel*  $\angle(g_1, g_2)$  *zwischen*  $g_1$  *und*  $g_2$  *im Punkt*  $z_0$  als den Winkel zwischen den Tangenten von  $g_1$  und  $g_2$  im Punkt  $z_0$ .
- (ii) Sei  $P$  ein hyperbolisches Polygon in  $\mathbb{H}$ . Dann werden die *Innenwinkel*  $\angle_{e_1}, \dots, \angle_{e_n}$  des Polygons an den Ecken  $e_1, \dots, e_n$  definiert als die innerhalb des Polygons liegenden Winkel zwischen den begrenzenden hyperbolischen Geraden.

**Definition 2.7** (Flächeninhalt). Der *hyperbolische Flächeninhalt*  $\mu(X)$  einer Menge  $X$  in  $\mathbb{H}$  ist gegeben durch das Integral

$$\mu(X) = \int_X \frac{1}{\operatorname{Im}(z)^2} dx dy = \int_X \frac{1}{y^2} dx dy,$$

wobei  $z = x + iy$ .

### 3 Fuchssche Gruppen

Betrachten wir die Gruppe der Möbiustransformationen auf der oberen Halbebene, also die Automorphismengruppe holomorpher Abbildungen der oberen Halbebene

$$\operatorname{Möb}(\mathbb{H}) := \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R}) := \left\{ \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\},$$

so besitzt diese viele Untergruppen. In dieser Bachelorarbeit interessieren wir uns aber vor allem für die diskreten Untergruppen, also die sogenannten Fuchsschen Gruppen und deren Eigenschaften.

**Definition 3.1** (diskrete Untergruppe). Eine Untergruppe  $\Gamma$  von  $\operatorname{Möb}(\mathbb{H})$  heißt *diskret*, falls die Menge

$$\Gamma(z) = \{\gamma(z) \mid \gamma \in \Gamma\}$$

diskret ist für jedes  $z \in \mathbb{H}$ . Wir nennen  $\Gamma(z)$  die *Bahn von*  $z$  unter  $\Gamma$ .

**Definition 3.2** (Fuchssche Gruppe). Eine *Fuchssche Gruppe*  $\Gamma$  ist eine diskrete Untergruppe von  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , also eine diskrete Gruppe von orientierungserhaltenden Isometrien der oberen Halbebene.

**Beispiel 3.3.** Die Untergruppe  $\{m(z) = z + a \mid a \in \mathbb{Z}\}$  ist eine diskrete Untergruppe von  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , da die Bahnen jeweils isomorph zu  $\mathbb{Z}$  und somit diskret in  $\mathbb{H}$  sind.

### 3.1 Erzeuger einer Gruppe

Manchmal kann es hilfreich sein, gegebene Gruppen mithilfe von Erzeugern darzustellen. Diese wollen wir nun einführen:

**Definition 3.4** (Menge von Erzeugern). Sei  $\Gamma$  eine Gruppe. Wir nennen eine Teilmenge  $S = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \in \Gamma$  eine *Menge von Erzeugern*, falls jedes Element aus  $\Gamma$  als Komposition der Elemente aus  $S$  und ihren Inversen geschrieben werden kann. Wir schreiben:  $\Gamma = \langle S \rangle$ .

**Beispiel 3.5.** Betrachten wir die Gruppe  $\Gamma = \{m(z) = z + a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ . Dann wird diese Gruppe durch  $S = \{m(z) = z + 1\}$  erzeugt. Es gilt also  $\Gamma = \langle S \rangle = \langle m \rangle$ .

**Bemerkung 3.6.** Für eine gegebene Gruppe  $\Gamma$  kann man im Allgemeinen viele verschiedene erzeugende Mengen konstruieren.

### 3.2 Klassifikation von Möbiustransformationen

Um einen besseren Überblick über Möbiustransformationen zu bekommen, wollen wir zunächst eine Klassifikation in Konjugationsklassen vornehmen. Der Beweis dieser eindeutigen Klassifikation ist in vielen Büchern nachzulesen, unter anderem aber in [And99].

**Definition 3.7** (konjugiert). Zwei Möbiustransformationen  $m, l \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  heißen *konjugiert* genau dann, wenn eine Möbiustransformation  $\varphi \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  existiert, sodass

$$m = \varphi \circ l \circ \varphi^{-1}$$

gilt.

**Lemma 3.8.** Jede Möbiustransformation  $m \in \text{Möb}(\mathbb{H}) \setminus \{id\}$  hat entweder keinen oder einen Fixpunkt in  $\mathbb{H}$ . Genauer, gilt für  $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  eine der folgenden Eigenschaften:

- (i)  $m$  ist die Identität und hat folglich unendlich viele Fixpunkte.
- (ii)  $m$  ist *loxodromisch*, also konjugiert zu  $q(z) = \lambda z, \lambda \in \mathbb{R}^{>0}$ , und hat somit keinen Fixpunkt in  $\mathbb{H}$ .
- (iii)  $m$  ist *parabolisch*, also konjugiert zu  $q(z) = z + 1$  und hat keinen Fixpunkt in  $\mathbb{H}$ .
- (iv)  $m$  ist *elliptisch*, also konjugiert zu  $q(z) = e^{2i\theta}z$  für ein  $\theta \in (0, \pi)$ ;  $m$  ist also eine Drehung um den Winkel  $2\theta$  und hat folglich genau einen Fixpunkt in  $\mathbb{H}$ .

*Beweis.* Siehe Anderson [And99, Theorem 6.1.]. □

### 3.3 Eigenschaften Fuchsscher Gruppen

Aus der Definition Fuchsscher Gruppen folgt sofort, dass jede Untergruppe Fuchsscher Gruppen ebenfalls eine Fuchssche Gruppe ist. Im Folgenden wollen wir nun weitere relevante Eigenschaften diskutieren:

**Lemma 3.9.** Möbiustransformationen sind winkel- und abstandserhaltende Transformationen, die zusätzlich konform sind. Seien also  $w, z$  zwei Punkte in  $\mathbb{H}$ ,  $g_1, g_2$  zwei hyperbolische Geraden in  $\mathbb{H}$  und  $X$  eine Menge in  $\mathbb{H}$ . Dann gilt:

1.  $d_{\mathbb{H}}(w, z) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(w), \gamma(z)) \forall \gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$
2.  $\angle(g_1, g_2) = \angle(\gamma(g_1), \gamma(g_2)) \forall \gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$
3.  $\mu(X) = \mu(\gamma(X)) \forall \gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$

*Beweis.* Für den Beweis verweisen wir auf [And99, Prop. 3.11., Thm. 2.23., Thm. 5.13.]. □

**Lemma 3.10.** Jede Fuchssche Gruppe ist abzählbar.

*Beweis.* Für den Beweis verweisen wir auf Anderson [And99, Ex.6.8.]. □

**Lemma 3.11.** Für jede Fuchssche Gruppe  $\Gamma$  existiert mindestens ein Punkt in  $\mathbb{H}$ , der durch kein nicht-triviales Element fixiert wird.

*Beweis.*  $\mathbb{H}$  ist nicht abzählbar und kann somit nicht als abzählbare Vereinigung von abzählbar vielen Punkten in  $\mathbb{H}$  geschrieben werden. Da die Gruppe  $\Gamma \setminus \{id\}$  aber aus abzählbar vielen Möbiustransformationen besteht und diese jeweils maximal einen Punkt in  $\mathbb{H}$  fixieren, muss ein solches nicht-fixiertes Element existieren.  $\square$

**Proposition 3.12.** Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe und  $z \in \mathbb{H}$  beliebig, dann ist  $\Gamma(z) \cap U_\epsilon(z)$  für jedes  $\epsilon > 0$  endlich.

*Beweis.* Angenommen, es existiert ein  $\epsilon > 0$  und ein  $z \in \mathbb{H}$ , sodass  $\Gamma(z) \cap U_\epsilon(z)$  nicht endlich ist.

Dann existiert  $(\gamma_n(z))_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma(z) \cap U_\epsilon(z)$ , sodass  $\gamma_n(z) \neq \gamma_m(z) \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m, (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$ .

Da  $(\gamma_n(z))_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{U_\epsilon(z)}$  und  $\overline{U_\epsilon(z)}$  kompakt ist, besitzt  $(\gamma_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$  eine in  $\overline{U_\epsilon(z)}$  konvergente Teilfolge  $(\gamma_k(z))_{k \in \mathbb{N}}$ , die gegen ein  $w \in \overline{U_\epsilon(z)}$  konvergiert. Da  $(\gamma_k(z))_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $w$  konvergiert, konvergiert  $(\gamma_{k+1}^{-1} \circ \gamma_k(z))_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $z$ . Da die Identität in  $\Gamma$  enthalten ist, ist  $z$  in  $\Gamma(z)$  enthalten. Da  $\Gamma$  eine Gruppe ist, ist zudem jedes  $\gamma_{k+1}^{-1} \circ \gamma_k$  ein Element von  $\Gamma$  und somit jedes  $\gamma_{k+1}^{-1} \circ \gamma_k(z)$  in  $\Gamma(z)$  enthalten. Folglich wäre  $\Gamma(z)$  nicht diskret.  $\square$

## 4 Fundamentalpolygone

Nachdem wir nun ein grundlegendes Verständnis von hyperbolischer Geometrie und diskreten Gruppenwirkungen auf der oberen Halbebene haben, möchten wir diese beiden Aspekte im Folgenden verbinden. Wir wollen spezielle hyperbolische Polygone, sogenannte Fundamentalpolygone, für die Wirkung gegebener Fuchsscher Gruppen auf  $\mathbb{H}$  konstruieren.

### 4.1 Definition von Fundamentalpolygonen

Um Fundamentalpolygone einführen zu können, müssen wir die dazu notwendige Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{H}$  definieren:

**Lemma 4.1.** Die Wirkung einer Fuchsschen Gruppe auf  $\mathbb{H}$  induziert eine Äquivalenzrelation  $\sim_\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$ . Seien  $z$  und  $w$  zwei Punkte in  $\mathbb{H}$ , dann gilt:

$$z \sim_\Gamma w \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma : w = \gamma(z)$$

Die Äquivalenzklassen sind genau die Bahnen  $\Gamma(z) := \{\gamma(z) \in \mathbb{H} \mid \gamma \in \Gamma\}$ .

*Beweis.* Der Beweis folgt direkt aus der Gruppenwirkung von  $\Gamma$ :

1. Reflexivität: Da die Identität  $id$  in  $\Gamma$  enthalten ist, gilt  $z = id(z)$  und folglich  $z \sim_{\Gamma} z$ .
2. Symmetrie: Sei  $z \sim_{\Gamma} w$ , dann gilt  $w = \gamma(z)$  für ein  $\gamma \in \Gamma$ . Da die inverse Abbildung  $\gamma^{-1}$  ebenfalls in  $\Gamma$  liegt, folgt  $z = \gamma^{-1}(w)$ , also  $w \sim_{\Gamma} z$ .
3. Transitivität: Sei  $z \sim_{\Gamma} w$  und  $w \sim_{\Gamma} y$ . Dann gilt  $w = \gamma(z)$  und  $y = \phi(w)$  für  $\gamma, \phi \in \Gamma$ . Da die Verknüpfung  $\phi \circ \gamma$  ebenfalls in  $\Gamma$  liegt, folgt  $y = \phi(\gamma(z))$  und somit  $z \sim_{\Gamma} y$ .

□

Man sieht also, dass die Gruppe  $\Gamma$  eine natürliche Projektion  $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma$  induziert, die ein Element  $z$  aus  $\mathbb{H}$  auf seine Äquivalenzklasse in  $\mathbb{H}/\Gamma$ , also die Bahn  $\Gamma(z)$ , abbildet. Wählen wir nun aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten, so erhalten wir eine Fundamentalmenge.

**Definition 4.2** (Fundamentalmenge). Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe. Eine *Fundamentalmenge* für die Wirkung von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$  ist die Wahl eines Repräsentanten aus jeder Äquivalenzklasse, bestimmt durch die Äquivalenzrelation  $\sim_{\Gamma}$ .

Da wir keine Voraussetzungen an die Wahl dieser Repräsentanten stellen, können sich Fundamentalmengen ungünstig verhalten. Somit sind diese als theoretische Konstruktion zwar sehr nützlich und unumgänglich, allerdings als praktische Konstruktion zu flexibel, um effektiv zu sein. Um ein nützlich Objekt zu erhalten, können wir die Definition einer Fundamentalmenge für Fuchssche Gruppen noch verfeinern. Dies führt uns zur Definition von Fundamentalgebieten. Hierzu benötigen wir allerdings noch eine weitere Definition.

**Definition 4.3** (exakte Invarianz unter der Identität). Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe. Eine Menge  $X \subset \mathbb{H}$  heißt *exakt invariant unter der Identität in  $\Gamma$*  genau dann, wenn

$$X \cap \gamma(X) = \emptyset, \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{id\}.$$

Die Translate von  $X$  sind also disjunkt zu  $X$ .

**Beispiel 4.4.** Betrachten wir die Fuchsschen Gruppen

$$\Gamma_\lambda = \{m_\lambda^k(z) = \lambda^k z \mid k \in \mathbb{Z}\}, \lambda > 1$$

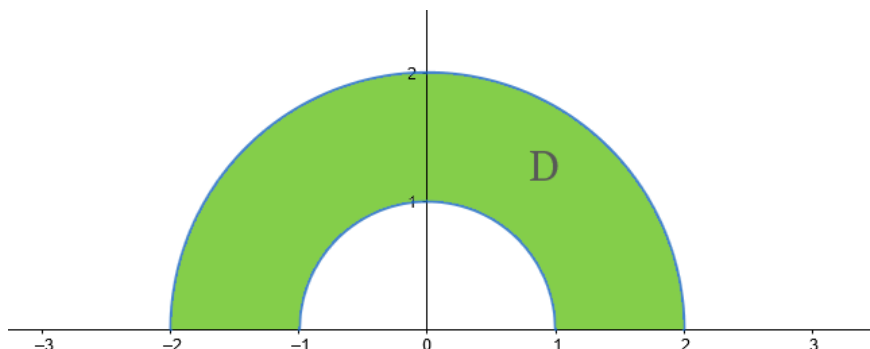


Abbildung 1:  $D = \{z \in \mathbb{H} \mid 1 < |z| < 2\}$

Dann gilt:

- $\lambda \geq 2$  :  $D \cap m_\lambda^k(D) = \emptyset$  für alle  $\gamma \in \Gamma_\lambda$  und  $k \neq 0$ , somit ist  $D$  exakt invariant unter der Identität in  $\Gamma_\lambda$  für  $\lambda \geq 2$ .
- $1 < \lambda < 2$  :  $m_\lambda^1(l_1) \subset D$ , somit ist  $D$  nicht exakt invariant unter der Identität in  $\Gamma_\lambda$  für  $1 < \lambda < 2$ .

**Definition 4.5** (Fundamentalgebiet). Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe. Ein *Fundamentalgebiet* für die Wirkung von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$  ist eine offene Menge  $U$  in  $\mathbb{H}$ , welche die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

1.  $U$  ist exakt invariant unter der Identität in  $\Gamma$ .
2. Der Abschluss  $\bar{U}$  in  $\mathbb{H}$  enthält eine Fundamentalmenge für die Wirkung von  $\Gamma$ .

Anders ausgedrückt bedeutet das, dass die Wirkung von  $\Gamma$  auf  $D$  eine Parkettierung der oberen Halbebene erzeugt, also eine überlappungsfreie, vollständige Überdeckung von  $\mathbb{H}$ .

**Weiterführung des Beispiels 4.4:** Wählt man  $\lambda = 2$ , so überdecken die Translate von  $\bar{D}$  ganz  $\mathbb{H}$  und folglich enthält  $\bar{D}$  eine Fundamentalmenge für die Wirkung von  $\Gamma_2$ . Da zudem exakte Invarianz unter der Identität vorliegt, ist  $D$  ein Fundamentalgebiet für  $\Gamma_2$ .

Diese Definition können wir noch weiter verfeinern:

**Definition 4.6** (Fundamentalpolygon). Ein *Fundamentalpolygon* für eine Fuchssche Gruppe ist ein hyperbolisches Polygon  $P$ , dessen Inneres ein Fundamentalgebiet für  $\Gamma$  ist.

Offensichtlich gilt: Ist  $F$  ein Fundamentalpolygon, so erzeugt  $\Gamma$  eine Parkettierung. Die Translate sind wieder Fundamentalpolygone.

**Weiterführung des Beispiels 4.4:** Da  $\bar{D}$  der Schnitt von zwei Halbebenen ist, ist  $\bar{D}$  ein hyperbolisches Polygon, dessen Inneres ein Fundamentalgebiet ist. Das Polygon  $\bar{D}$  ist also ein Fundamentalpolygon für  $\Gamma_2$ .

## 4.2 Das Dirichlet Polygon

Nachdem wir nun Fundamentalpolygone formal eingeführt haben und bereits ein erstes Beispiel gesehen haben, wollen wir in diesem Abschnitt zunächst eine allgemeine Konstruktionsmöglichkeit von Fundamentalpolygonen für beliebige Fuchssche Gruppen beschreiben und im Anschluss beweisen. Anschließend werden wir diese Konstruktion des sogenannten Dirichlet Polygons anhand eines Beispiels nachrechnen.

**Definition 4.7** (Mittelsenkrechte). Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe und  $\gamma$  ein nicht-triviales Element in  $\Gamma$ . Sei  $z_0 \in \mathbb{H}$ , dann wird die *Mittelsenkrechte* des Geradenstücks von  $z_0$  nach  $\gamma(z_0)$  definiert als die hyperbolische Gerade

$$l_\gamma = \{w \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(w, z_0) = d_{\mathbb{H}}(w, \gamma(z_0))\}.$$

**Definition und Satz 4.8** (Konstruktion des Dirichlet Polygons). Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe und  $\Gamma'$  die Gruppe der nicht-trivialen Elemente aus  $\Gamma$ . Dann existiert nach Lemma 3.11 ein  $z_0 \in \mathbb{H}$ , das von keinem Element aus  $\Gamma'$  fixiert wird. Für alle  $\gamma \in \Gamma'$  sei  $l_\gamma$  die Mittelsenkrechte des hyperbolischen Geradenstücks von  $z_0$  nach  $\gamma(z_0)$  und  $H_\gamma$  die durch  $l_\gamma$  bestimmte Halbebene, die  $z_0$  enthält. Dann heißt der Schnitt

$$D_\Gamma(z_0) := \bigcap_{\gamma \in \Gamma'} H_\gamma$$

*Dirichlet Polygon* für  $\Gamma$  zentriert in  $z_0$ , welches ein Fundamentalpolygon für  $\Gamma$  ist.

*Beweis.* Ein Fundamentalpolygon ist ein hyperbolisches Polygon, dessen Inneres ein Fundamentalgebiet ist, somit beweisen wir die Aussage in zwei Schritten:

1. zu zeigen:  $D_\Gamma(z_0)$  ist ein hyperbolisches Polygon, d.h. eine abgeschlossene konvexe Menge, die als lokal endlicher Schnitt von abgeschlossenen Halbebenen dargestellt werden kann.
  - (i)  $D_\Gamma(z_0)$  ist eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von  $\mathbb{H}$ , da das Polygon der Schnitt einer Menge  $H = \{H_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$  von abgeschlossenen Halbebenen in  $\mathbb{H}$  ist.
  - (ii) Die lokale Endlichkeit folgt aus Proposition 3.12, d.h. dass in einer  $\epsilon$ -Umgebung von  $z$  nur endlich viele Translate von  $z$  sind.  
Sei  $\epsilon > 0$ , dann gilt

$$l_\gamma \cap U_\epsilon(z_0) \neq \emptyset \Leftrightarrow \gamma(z_0) \in U_{2\epsilon}(z_0).$$

Da  $\Gamma(z_0) \cap U_{2\epsilon}(z_0)$  nur endlich viele Translate von  $z_0$  enthält, liegen nur für endlich viele Translationen  $\gamma(z_0)$  in  $U_{2\epsilon}$  und folglich schneiden nur endlich viele der Mittelsenkrechten  $l_\gamma$  die  $\epsilon$ -Umgebung  $U_\epsilon(z_0)$ . Für beliebiges  $w \in \mathbb{H}$  und beliebiges  $C > 0$ , gilt  $U_C(w) \subset U_\epsilon(z_0)$  für ein  $\epsilon > 0$  (wähle  $\epsilon := d_{\mathbb{H}}(z_0, w) + C$ ) und somit schneiden nur endlich viele der Mittelsenkrechten  $l_\gamma$  die  $C$ -Umgebung von  $w$ .

Damit ist  $D_\Gamma(z_0)$  ein hyperbolisches Polygon.

2. zu zeigen: das Innere von  $D_\Gamma(z_0)$  ist ein Fundamentalgebiet, d.h. das Innere von  $D_\Gamma(z_0)$  ist exakt invariant unter der Identität in  $\Gamma$  und  $D_\Gamma(z_0)$  enthält eine Fundamentalmenge für die Wirkung von  $\Gamma$ .

Um dies zu zeigen, schreiben wir  $D_\Gamma(z_0)$  zunächst um:  
Jede Mittelsenkrechte hat die Form:

$$l_\gamma = \{w \in \mathbb{H} \mid d(z_0, w) = d(\gamma(z_0), w)\}$$



Die Halbebene, die durch eine solche Mittelsenkrechte  $l_\gamma$  bestimmt ist, hat damit die Form:

$$H_\gamma = \{w \in \mathbb{H} \mid d(z_0, w) \leq d(\gamma(z_0), w)\}$$

Nun kann man das Dirichlet-Polygon umschreiben zu:

$$D_\Gamma(z_0) = \{w \in \mathbb{H} \mid d(z_0, w) \leq d(\gamma(z_0), w) \forall \gamma \in \Gamma'\}$$

Das Innere des Dirichlet-Polygons sind also alle Punkte in  $\mathbb{H}$ , die näher zu  $z_0$  als zu beliebigem  $\gamma(z_0)$  sind:

$$\text{int}(D_\Gamma(z_0)) = \{w \in \mathbb{H} \mid d(z_0, w) < d(\gamma(z_0), w) \forall \gamma \in \Gamma'\}$$

(i) zu zeigen: exakte Invarianz unter der Identität in  $\Gamma$

Angenommen, das Innere von  $D_\Gamma(z_0)$  wäre nicht exakt invariant unter der Identität in  $\Gamma$ , dann existiert ein  $\varphi \in \Gamma'$ :

$$\text{int}(D_\Gamma(z_0)) \cap \varphi(\text{int}(D_\Gamma(z_0))) \neq \emptyset,$$

d.h.  $\text{int}(D_\Gamma(z_0)) \cap \varphi(\text{int}(D_\Gamma(z_0)))$  enthält einen Punkt  $x$ .  
Da  $x \in \text{int}(D_\Gamma(z_0))$ , gilt

$$d(z_0, x) < d(\gamma(z_0), x) \forall \gamma \in \Gamma'$$

Da  $x \in \varphi(\text{int}(D_\Gamma(z_0)))$ , können wir  $x = \varphi(y)$  für ein  $y \in \text{int}(D_\Gamma(z_0))$  schreiben. Damit gilt für dieses  $y$ :

$$d(z_0, y) < d(\gamma(z_0), y) \forall \gamma \in \Gamma'$$

Da  $\varphi$  eine Isometrie von  $\mathbb{H}$  ist, gilt

$$d(x, \varphi(z_0)) = d(\varphi^{-1}(x), z_0) = d(y, z_0)$$

und

$$d(\varphi^{-1}(y), z_0) = d(y, \varphi(z_0)) = d(x, z_0)$$

Damit würde allerdings folgen:

$$d(z_0, x) < d(\varphi(z_0), x) = d(y, z_0) < d(\varphi^{-1}(z_0), y) = d(x, z_0) \zeta$$

Somit kann kein  $x \in \text{int}(D_\Gamma(z_0)) \cap \varphi(\text{int}(D_\Gamma(z_0)))$  existieren und  $\text{int}(D_\Gamma(z_0))$  ist exakt invariant unter der Identität in  $\Gamma$ .

- (ii) zu zeigen:  $D_\Gamma(z_0)$  enthält eine Fundamentalmenge für die Wirkung von  $\Gamma$  in  $\mathbb{H}$

Sei  $w \in \mathbb{H}$ . Dann existiert nach Proposition 3.12 ein Punkt in der Bahn  $\Gamma(z_0) = \{\gamma(z_0) \mid \gamma \in \Gamma\}$  der am nächsten zu  $w$  ist.

Um dies zu sehen, wählen wir  $\delta > 0$ , sodass  $U_\delta(w) \cap \Gamma(z_0)$  nicht leer ist und wählen  $\epsilon := \delta + d(z_0, w)$ . Da  $U_\delta(w) \subset U_\epsilon(z_0)$  und  $U_\epsilon(z_0) \cap \Gamma(z_0)$  endlich, ist  $U_\delta(w) \cap \Gamma(z_0)$  endlich. Wir können nun einen Punkt  $\gamma_w(z_0)$  in  $U_\delta(w) \cap \Gamma(z_0)$  wählen, der am nächsten an  $w$  ist, auch wenn dieser nicht zwingend eindeutig ist.

Somit gilt:

$$d(\gamma_w(z_0), w) \leq d(\gamma(z_0), w) \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

Da  $\gamma_w^{-1}$  eine Isometrie ist, gilt

$$d(z_0, \gamma_w^{-1}(w)) \leq d(\gamma_w^{-1}(\gamma(z_0)), \gamma_w^{-1}(w)) \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

$\gamma_w^{-1} \circ \gamma$  durchläuft ganz  $\Gamma$ , da  $\gamma$  ganz  $\Gamma$  durchläuft. Somit folgt nach Definition, dass  $\gamma_w^{-1}(w) \in D_\Gamma(z_0)$ . Also enthält  $D_\Gamma(z_0)$  einen Punkt der Bahn  $\Gamma(w) \quad \forall w \in \mathbb{H}$ .

Damit folgt, dass  $D_\Gamma(z_0)$  eine Fundamentalmenge für die Wirkung von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$  enthält.

Insgesamt ist damit also bewiesen, dass jedes Dirichlet Polygon ein Fundamentalpolygon ist. □

### 4.3 Konkrete Konstruktion für $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$

Die konkrete Berechnung von Dirichlet Polygonen ist meist schwer, da man die Bahn von  $z_0$ , sowie die Punkte, die näher zu  $z_0$  als zu  $\gamma(z_0)$  sind, nur schwer berechnen kann. Jedoch gibt es einige Beispiele, für die dies gut möglich ist.

**Beispiel 4.9.** Betrachte das Dirichlet Polygon  $D_\Gamma(ki)$ ,  $k > 1$  mit  $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ .

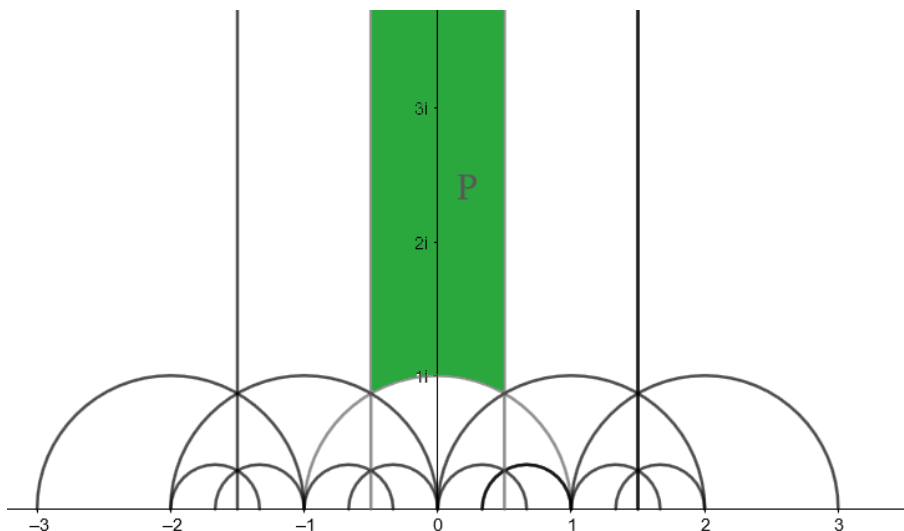


Abbildung 2:  $P = D_\Gamma(ki)$ ,  $k > 1$  mit  $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$

Behauptung:

$$D := D_\Gamma(ki) = \{z \in \mathbb{H} \mid |\text{Re}(z)| \leq 1/2; |z| \geq 1\} =: P$$

„ $\subseteq$ “ Da die Gruppe

$$\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ m(z) = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

durch die Transformationen  $T_b(z) = z + b, b \in \mathbb{Z}$  und  $S(z) = -1/z$  erzeugt wird (dies wird in Beispiel 6.2 noch gezeigt), wird  $P$  durch den Schnitt der Mittelsenkrechten von  $T_1, T_{-1}$  und  $S$  erzeugt. Dadurch ist  $D \subseteq P$ .

„ $\supseteq$ “ Angenommen  $D \neq P$ , dann schneidet eine Seite von  $D$  das Polygon  $P$  und somit existiert ein  $z_0$  im Inneren  $\mathring{P}$  von  $P$ :  $h(z_0) \in h(D) \cap \mathring{P}$  für ein  $h \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ .

Wir zeigen, dass dies einen Widerspruch darstellt:

Sei  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , dann gilt für  $z \in \mathring{P}$

$$\begin{aligned} |cz + d|^2 &= c^2|z|^2 + 2\text{Re}(z)cd + d^2 \\ &> c^2 + d^2 - |cd| \\ &= (|c| - |d|)^2 + |cd| \geq 1 \end{aligned}$$

denn  $\text{Re}(z) > -1/2$ ;  $|z| > 1$  und da  $m \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , gilt zudem  $c, d \in \mathbb{Z}$  und mindestens eine der beiden Variablen  $\neq 0$ .

Da für  $m(z) \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  gilt, dass  $ad - bc = 1$ , folgt:

$$\begin{aligned} \text{Im}(m(z)) &= \text{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \\ &= \frac{\text{Im}((az + b)(c\bar{z} + d))}{|cz + d|^2} \\ &= \frac{\text{Im}(ac|z|^2 + bc\bar{z} + adz + bd)}{|cz + d|^2} \\ &= \frac{\text{Im}(bc\bar{z} + adz)}{|cz + d|^2} \\ &= \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2} < \text{Im}(z) \end{aligned}$$

Wählt man nun  $m(z) = h^{-1}(z)$  und  $z = h(z_0)$ , so gilt

$$\text{Im}(h^{-1}(h(z_0))) = \text{Im}(z_0) < \text{Im}(h(z_0)),$$

aber für  $m(z) = h(z)$  und  $z = z_0$  gilt

$$\text{Im}(h(z_0)) < \text{Im}(z_0)$$

was einen Widerspruch darstellt. Somit muss  $P$  bereits  $D_\Gamma(ki)$  sein.

## 5 Vorraussetzungen für Poincarés Satz

Nachdem wir eine konkrete Methode entwickelt haben, um aus einer gegebenen Fuchsschen Gruppe, das dazu assoziierte Fundamentalpolygon zu konstruieren, möchten wir uns nun mit der Umkehrung befassen. Wir wollen also aus einem gegebenen Fundamentalpolygon eine Fuchssche Gruppe erzeugen. Dazu führen wir zunächst eine allgemeine Darstellung von hyperbolischen Polygonen mithilfe von seitenpaarenden Transformationen ein. Wir orientieren uns hierbei an der Vorlesung von Walkden [Wal19].

## 5.1 Seitenpaarende Transformationen und ihre Darstellung

**Definition 5.1** (Seite). Sei  $P$  ein hyperbolisches Polygon. Eine *Seite*  $s \subset \mathbb{H}$  von  $P$  ist eine Kante von  $P$  in  $\mathbb{H}$  ausgestattet mit einer Orientierung.

Somit ist eine Seite von  $D$  eine Kante, die an einer Ecke beginnt und an einer anderen Ecke endet.

**Lemma 5.2.** Sei  $F$  ein Fundamentalpolygon für die Fuchssche Gruppe  $\Gamma$ . Dann gilt für den Schnitt  $F \cap \gamma(F)$  für  $\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$  entweder  $F \cap \gamma(F) = \emptyset$ ,  $F \cap \gamma(F) = e$  oder  $F \cap \gamma(F) = s$  mit  $e$  einer Ecke von  $F$  und  $s$  einer Seite von  $F$ .

*Beweis.* Angenommen  $F \cap \gamma(F)$  besitzt für ein  $\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$  drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann erzeugt  $F \cap \gamma(F)$  ein hyperbolisches Dreieck mit nicht-leerem Inhalt. Folglich wäre das Innere von  $F$  nicht exakt-invariant unter der Identität.  $\square$

**Definition 5.3** (Seitenpaarende Transformation). Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe und  $D := D_\Gamma(z_0)$  ein Dirichletpolygon für  $\Gamma$  mit endlich vielen Seiten. Sei  $s$  eine Seite von  $D$ . Falls für ein  $\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$  gilt, dass  $\gamma(s)$  ebenfalls eine Seite von  $D$  ist, so nennen wir die Seiten  $s$  und  $\gamma(s)$  *gepaart* und  $\gamma$  eine *seitenpaarende Transformation*.

**Bemerkung 5.4.**

- Wir stellen fest, dass  $\gamma^{-1} \in \Gamma \setminus \{id\}$  die Seite  $\gamma(s)$  zurück auf die Seite  $s$  abbildet und somit ebenfalls eine seitenpaarende Transformation darstellt.
- Es ist möglich, dass  $s$  und  $\gamma(s)$  die gleiche Seite sind, nur mit umgekehrter Orientierung. In diesem Fall heißt  $s$  *gepaart mit sich selbst*.

Hat man nun eine Seite eines Dirichlet Polygons gegeben, so kann man explizit eine seitenpaarende Transformation dazu finden. Dazu betrachten wir die folgende Konstruktion:

**Konstruktion 5.5.** Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe,  $z_0 \in \mathbb{H}$  und  $s$  Seite eines Dirichlet Polygons  $D_\Gamma(z_0)$ . Nach Konstruktion des Dirichlet Polygons ist  $s$  in einer Mittelsenkrechten  $l_\gamma := \{w \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(w, z_0) = d_{\mathbb{H}}(w, \gamma(z_0))\}$  für ein

$\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$  enthalten. Dann gilt, dass die Möbiustransformation  $\gamma^{-1}$  die Seite  $s$  auf eine andere Seite  $\gamma^{-1}(s)$  von  $D_\Gamma(z_0)$  abbildet. Wir bezeichnen die so konstruierte Möbiustransformation  $\gamma_s := \gamma^{-1}$  als die zur Seite  $s$  *assozierte seitenpaarende Transformation*.

*Beweis.*

Sei  $\Gamma^*$  die Menge der Transformationen  $\gamma$  von  $\Gamma$ , sodass  $F \cap \gamma(F)$  eine Seite von  $D$  ist, also folglich die Menge der Transformationen, die eine begrenzende Mittelsenkrechte  $l_\gamma$  erzeugen und sei  $S$  die Menge der Seiten von  $D$ . Offensichtlich induziert jedes  $\gamma$  eine eindeutige Seite  $s$  in  $S$  (nämlich  $s = F \cap \gamma(F)$ ) und jede Seite kann auf diese Weise erzeugt werden, sodass eine bijektive Abbildung

$$\Phi : \Gamma^* \rightarrow S$$

existiert mit

$$\Phi(\gamma) = F \cap \gamma(F).$$

Es existiert also auch die inverse Abbildung  $\Phi^{-1} : S \rightarrow \Gamma^*$  und somit ist zu jedem  $s$  eine eindeutige seitenpaarende Transformation  $\gamma \in \Gamma^*$  gegeben mit  $s = F \cap \gamma(F)$ . Dann gilt

$$\gamma^{-1}(s) = F \cap \gamma^{-1}(F) = s'$$

und dies ist wieder eine Seite. Wir definieren  $\gamma_s$  als genau diese Abbildung  $\gamma^{-1}$ . Falls also  $s' = (\gamma_s)(s)$  gilt, so gilt  $\gamma_{s'} = (\gamma_s)^{-1}$ . Und insgesamt gilt  $(s')' = \gamma_{s'}(s') = (\gamma_s)^{-1}(s') = s$ .  $\square$

**Beispiel 5.6.** Wir betrachten das in Beispiel 4.9 konstruierte Dirichlet Polygon  $D := D_\Gamma(2i) = \{z \in \mathbb{H} \mid |\operatorname{Re}(z)| \leq 1/2; |z| \geq 1\}$  für  $\Gamma = \mathbb{S}\mathbb{L}_2(\mathbb{Z})$ .

Dann ist  $s$  enthalten in der Mittelsenkrechten  $l_g$  für  $g(z) = z - 1 \in \mathbb{S}\mathbb{L}_2(\mathbb{Z})$ . Damit gilt  $\gamma_s(z) = g^{-1}(z) = z + 1 \in \mathbb{S}\mathbb{L}_2(\mathbb{Z})$ . Diese Transformation bildet  $s = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) = -1/2; |z| \geq 1\}$  offensichtlich auf  $s' = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) = 1/2; |z| \geq 1\}$  ab.

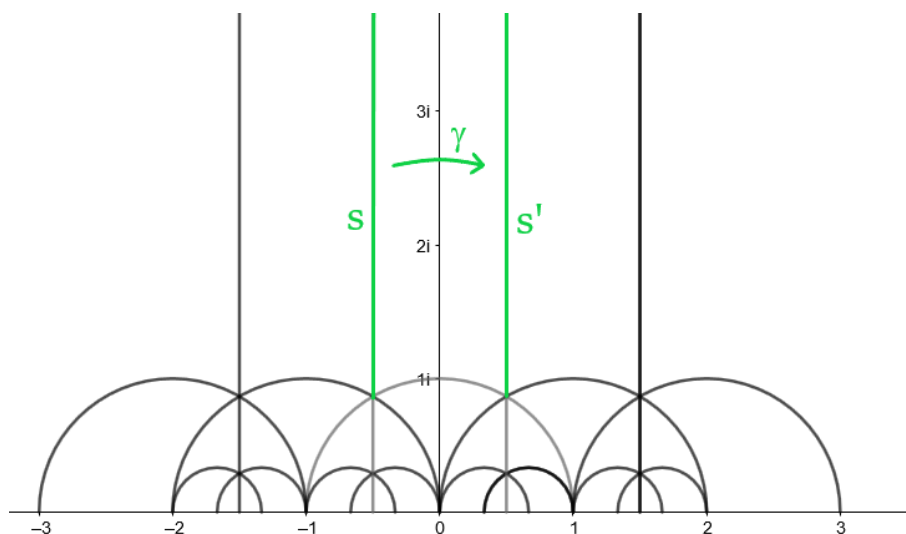


Abbildung 3:  $s$  wird mit  $s'$  gepaart

Meist ist hilfreich, in Form eines Diagramms darzustellen, welche Seiten miteinander gepaart werden und wie die seitenpaarenden Transformationen wirken. Hierbei werden die gepaarten Seiten mit einer gleichen Anzahl an Pfeilen dargestellt, wobei die Richtung dieser angibt, wie sie durch die Möbiustransformationen aufeinander abgebildet werden, d.h. die Paarung erhält die Richtung der Seiten.

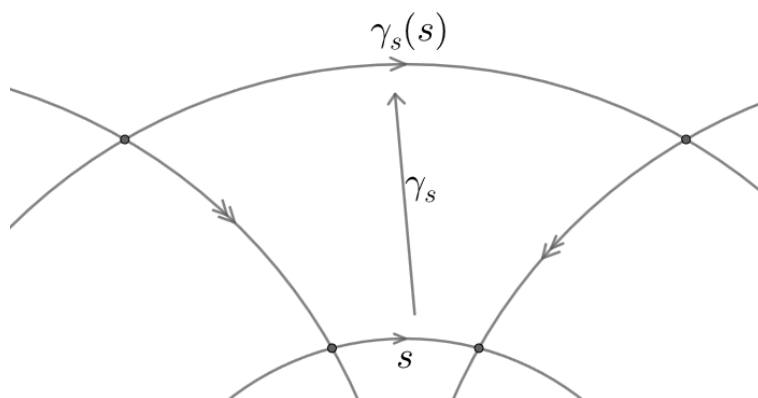


Abbildung 4: Die Seite  $s$  wird durch  $\gamma_s$  auf  $\gamma_s(s)$  abgebildet

## 5.2 Elliptische Kreise

Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe und sei  $D := D_\Gamma(z_0)$  ein Dirichlet Polygon für  $\Gamma$ . Angenommen alle Kanten von  $D$  liegen in  $\mathbb{H}$ . Wir haben bereits gesehen, wie man zu jeder Seite  $s$  eine Transformation  $\gamma_s \in \Gamma \setminus \{id\}$  konstruieren kann, die  $s$  mit einer anderen Seite  $\gamma_s(s)$  von  $D$  paart.

Man sieht nun, dass jede Ecke  $e$  von  $D$  durch eine seitenpaarende Transformation assoziiert zu einer Seite mit Endpunkt in  $e$  auf eine andere Ecke in  $D$  abgebildet wird.

Jede Ecke  $e$  ist der Endpunkt von zwei Seiten  $s$  und  $s^*$  von  $D$ . Das Paar  $(e, s)$  bezeichnet nun eine Ecke  $e$  in  $D$ , die Endpunkt einer Seite  $s$  von  $D$  ist. Wir bezeichnen mit  $(e, s)^*$  das Paar bestehend aus der Ecke  $e$  und der Seite  $s^*$ , die ebenfalls in  $e$  endet.

Betrachten wir nun den folgenden Ablauf:

- (i) Sei  $e = e_0$  eine Ecke von  $D$  und sei  $s_0$  eine Seite mit Eckpunkt in  $e$ . Sei  $\gamma_1$  die seitenpaarende Transformation assoziiert zur Seite  $s_0$ . Dann bildet  $\gamma_1$  die Seite  $s_0$  auf eine andere Seite  $s_1$  von  $D$  ab.
- (ii) Sei  $s_1 := \gamma_1(s_0)$  und sei  $e_1 := \gamma_1(e_0)$ . Dann erhalten wir ein neues Paar  $(e_1, s_1)$ .
- (iii) Betrachten wir nun das Paar  $(e_1, s_1)^*$ , bestehend aus der Ecke  $e_1$  und der Seite  $s_1^*$ , also der anderen an  $e_1$  angrenzenden Seite.
- (iv) Sei  $\gamma_2$  die seitenpaarende Transformation assoziiert zur Seite  $s_1^*$ . Dann ist  $s_2 := \gamma_2(s_1^*)$  eine Seite von  $D$  und  $e_2 := \gamma_2(e_1)$  eine Ecke von  $D$ .
- (v) Wiederhole diesen Vorgang.

Mit Hilfe dieser Konstruktion erhalten wir eine Folge an Paaren von Ecken



und Seiten:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} e_0 \\ s_0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\gamma_1} & \begin{pmatrix} e_1 \\ s_1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} e_1 \\ s_1^* \end{pmatrix} \\
 & & \xrightarrow{\gamma_2} & & \xrightarrow{*} \dots \\
 & & & & \dots \\
 & & \xrightarrow{\gamma_i} & & \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} e_i \\ s_i^* \end{pmatrix} \\
 & & \xrightarrow{\gamma_{i+1}} & & \xrightarrow{*} \dots
 \end{array}$$

Da es nur endlich viele Paare  $(e, s)$  gibt, muss dieser Prozess zwangsläufig beim Ausgangspaar  $(e_0, s_0)$  auskommen. Sei  $n > 0$  die kleinste ganze Zahl für die gilt:  $(e_n, s_n)^* = (e_0, s_0)$ .

**Definition 5.7** (Elliptischer Kreis und elliptische Kreistransformation). Die Folge von Ecken  $\epsilon = e_0 \rightarrow e_1 \rightarrow \dots \rightarrow e_{n-1}$  heißt *elliptischer Kreis*. Die Transformation  $\gamma_n \gamma_{n-1} \dots \gamma_2 \gamma_1$  heißt *elliptische Kreistransformation*. Sei  $e$  eine Ecke des hyperbolischen Polygons  $P$ . Dann notieren wir die elliptische Kreistransformation assoziiert zur Ecke  $e$  und der Seite  $s$  mit  $\gamma_{e,s}$ .

**Beispiel 5.8.** Für ein Viereck in  $\mathbb{H}$  können wir leicht einen elliptischen Kreis, siehe Abbildung 5, konstruieren:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} e_0 \\ s_0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\gamma_1} & \begin{pmatrix} e_1 \\ s_1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} e_1 \\ s_1^* \end{pmatrix} \\
 & & \xrightarrow{\gamma_2} & & \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} e_2 \\ s_2^* \end{pmatrix} \\
 & & \xrightarrow{\gamma_1^{-1}} & & \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} e_3 \\ s_3^* \end{pmatrix} \\
 & & \xrightarrow{\gamma_2^{-1}} & & \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} e_0 \\ s_0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Somit ist die elliptische Kreistransformation  $\gamma_{e_0, s_0} = \gamma_2^{-1} \gamma_1^{-1} \gamma_2 \gamma_1$  für den elliptischen Kreis  $\epsilon : e_0 \rightarrow e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow e_3$ .

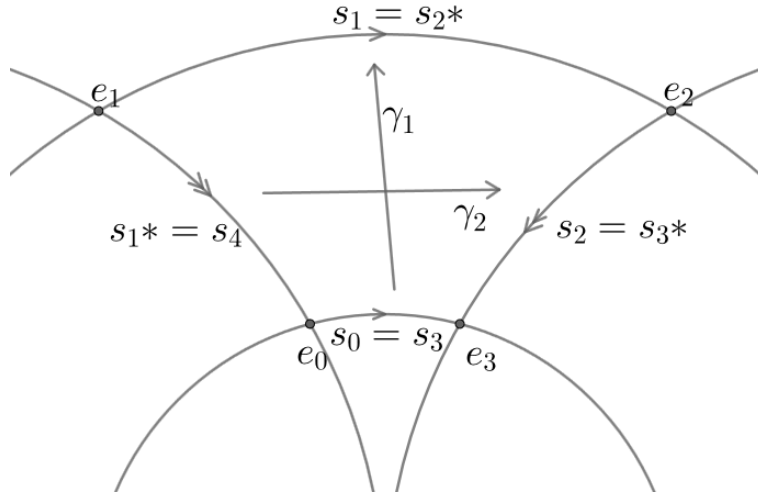


Abbildung 5: Das hyperbolische Viereck wird durch  $e_0, e_1, e_2$  und  $e_3$  begrenzt.

**Bemerkung 5.9.** Da es nur endlich viele Paare von Ecken und Seiten gibt, sehen wir, dass es nur endlich viele elliptische Kreise und elliptische Kreistransformationen geben kann.

**Bemerkung 5.10.**

1. Angenommen, man beginnt am Paar  $(e, s)^*$  anstelle von  $(e, s)$ . Dann erhält man mit obiger Konstruktion eine elliptische Kreistransformation  $\gamma_{e,s^*}$ . Man stellt leicht fest, dass hierfür  $\gamma_{e,s^*} = \gamma_{e,s}^{-1}$  gilt.
2. Angenommen, man beginnt bei  $(e_i, s_i)^*$  anstelle von  $(e_0, s_0)$ . Dann erhält man eine elliptische Kreistransformation

$$\gamma_{e_i, s_i^*} = \gamma_i \gamma_{i-1} \cdots \gamma_1 \gamma_n \cdots \gamma_{i+2} \gamma_{i+1},$$

das heißt eine zyklische Permutation der Abbildungen, die involviert sind in der elliptischen Kreistransformation assoziiert zu  $(e_0, s_0)$ . Noch genauer kann man sehen, dass

$$\gamma_{e_i, s_i^*} = (\gamma_i \cdots \gamma_1) \gamma_{e_0, s_0} (\gamma_i \cdots \gamma_1)^{-1}$$

gilt. Das heißt,  $\gamma_{e_i, s_i^*}$  und  $\gamma_{e_0, s_0}$  sind konjugierte Möbiustransformationen.

*Beweis.*

1. Die zu  $(e, s^*)$  assoziierte elliptische Kreistransformation durchläuft den Konstruktionsprozess „rückwärts“. Denn die zu  $(e, s^*)$  assoziierte Transformation ist genau  $\gamma_n^{-1}$ . Man sieht insgesamt, dass also  $\gamma_{e,s^*} = \gamma_1^{-1} \cdots \gamma_n^{-1} = (\gamma_n \cdots \gamma_1)^{-1} = \gamma_{e,s}^{-1}$  gilt.
2. Beginnt man den Algorithmus an der Stelle  $(e_i, s_i^*)$  so ist  $\gamma_{i+1}$  die erste seitenpaarende Transformation, die man anwendet. Man sieht also schnell, dass die assoziierte elliptische Kreistransformation die Form

$$\gamma_{e_i, s_i^*} = \gamma_i \gamma_{i-1} \cdots \gamma_1 \gamma_n \cdots \gamma_{i+2} \gamma_{i+1}$$

hat. Die Konjugiertheit folgt direkt aus

$$\begin{aligned} \gamma_{e_i, s_i^*} &= \gamma_i \gamma_{i-1} \cdots \gamma_1 \gamma_n \cdots \gamma_{i+2} \gamma_{i+1} \\ &= (\gamma_i \cdots \gamma_1) \gamma_n \gamma_{n-1} \cdots \gamma_2 \gamma_1 (\gamma_1^{-1} \cdots \gamma_i^{-1}) \\ &= (\gamma_i \cdots \gamma_1) \gamma_{e_0, s_0} (\gamma_i \cdots \gamma_1)^{-1} \end{aligned}$$

□

Sei  $e$  eine Ecke von  $D$  mit assoziierter Kreistransformation  $\gamma_{e,s}$ . Dann ist  $\gamma_{e,s}$  eine Möbiustransformation, welche die Ecke  $e$  fixiert. Wir wissen, dass eine solche Möbiustransformation mit Fixpunkt in  $\mathbb{H}$  entweder elliptisch oder die Identität sein muss. Daher ist jede elliptische Kreistransformation entweder eine elliptische Möbiustransformation oder die Identität.

**Definition 5.11** (Zufälliger Kreis). Falls eine elliptische Kreistransformation die Identität ist, so nennen wir den elliptischen Kreis einen *zufälligen Kreis*.

### 5.3 Die Ordnung eines elliptischen Kreises

**Definition 5.12** (Ordnung). Sei  $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  eine Möbiustransformation. Wir sagen,  $\gamma$  hat *endliche Ordnung*, falls eine ganze Zahl  $m > 0$  existiert, so dass  $\gamma^m = id$  gilt. Wir nennen die kleinste so existierende Zahl  $m_\gamma$  die *Ordnung* von  $\gamma$ .

**Beispiel 5.13.** Wählt man  $\gamma(z) = -\frac{1}{z} \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ , so hat diese Möbiustransformation offensichtlich Ordnung  $m_\gamma = 2$ .

Allgemein gilt:

Falls  $\gamma$  zu einer Rotation durch ein rationales Vielfaches von  $2\pi$  konjugiert ist, so hat  $\gamma$  offensichtlich endliche Ordnung. Genau genommen ist dies die einzige Art, wie Elemente endlicher Ordnung erzeugt werden können (offensichtlich gilt  $\lambda^m z \neq id, \lambda > 1, \forall m > 1$ , sowie  $z + m \neq id, m > 1$ ). Somit gilt, falls  $\gamma$  endliche Ordnung hat, dann ist  $\gamma$  elliptisch.

Für Elemente einer Fuchsschen Gruppe gilt hierbei auch die umgekehrte Richtung: elliptische Elemente haben endliche Ordnung (und sind somit konjugiert zu einer Rotation durch ein rationales Vielfaches von  $2\pi$ ).

**Proposition 5.14.** Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe und sei  $\gamma \in \Gamma$  ein elliptisches Element. Dann existiert eine ganze Zahl  $m \geq 1$ , so dass  $\gamma^m = id$ .

*Beweis.* Wir orientieren uns an dem Beweis von [Wal19, Prop. 17.2.1.]. Wir erinnern uns daran, dass eine elliptische Möbiustransformation  $\gamma$  zu einer Möbiustransformation der Form  $m(z) = e^{2\pi i\theta} \cdot z$ , mit  $\theta \in [0, 1]$  konjugiert ist, das heißt zu einer Rotation um den Winkel  $2\pi\theta$ . Betrachten wir nun die Elemente  $\gamma^n$ ; diese sind offensichtlich konjugiert zu einer Rotation um den Winkel  $2\pi n\theta \bmod 2\pi$ . Die Proposition folgt nun aus folgendem Fakt: Die Folge  $(n\theta \bmod 1)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine diskrete Untergruppe von  $[0, 1]$  genau dann, wenn  $\theta$  rational ist, also  $\theta = \frac{k}{m}$ , mit  $k, m \in \mathbb{Z}$  gilt. Da nun  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe ist, ist die Untergruppe  $\{\gamma^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  ebenfalls eine Fuchssche Gruppe und somit diskret. Damit muss aber auch  $(n\theta \bmod 1)_{n \in \mathbb{N}}$  diskret sein und folglich gilt  $\theta = k/m$ , mit  $k, m \in \mathbb{Z}$ .

Also ist  $\gamma$  konjugiert zu einer Rotation um  $2k\pi/m$ , was nichts anderes bedeutet, als dass  $\gamma^m$  konjugiert ist zu einer Rotation um  $2k\pi$ , d.h. dass  $\gamma^m$  die Identität ist.  $\square$

Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe mit Dirichlet Polygon  $D$ . Sei  $e$  eine Ecke von  $D$  mit elliptischer Kreistransformation  $\gamma_{e,s} \in \Gamma$ . Dann ist nach Proposition 5.14  $m_{\gamma_{e,s}}$  wohldefiniert.

**Lemma 5.15.** Sei  $e$  eine Ecke von  $D$  und  $s$  eine angrenzende Seite, sowie  $m_{\gamma_{e,s}}$  die wohldefinierte elliptische Kreistransformation. Sei nun  $e'$  eine weitere Ecke in  $D$  und  $s'$  eine an  $e'$  angrenzende Seite, dann gilt  $m_{\gamma_{e,s}} = m_{\gamma_{e',s'}}$ . Daher kann man allgemein für einen elliptischen Kreis  $\epsilon$  die Ordnung  $m_\epsilon$

definieren, für die gilt, dass  $m_\epsilon$  die Ordnung einer elliptischen Kreistransformation  $\gamma_{e,s}$  für beliebige Ecke  $e$  und Seite  $s$  mit Endpunkt in  $e$  des elliptischen Kreises ist. Wir nennen  $m_\epsilon$  die *Ordnung* von  $\epsilon$ .

*Beweis.* Sei  $m$  die Ordnung von  $\gamma_{e,s}$ , d.h.  $\gamma_{e,s}^m = id$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\gamma_{e',s'}^m &= (\alpha \cdot \gamma_{e,s} \cdot \alpha^{-1})^m, \text{ für ein } \alpha \in \Gamma \\ &= \alpha \cdot \gamma_{e,s}^m \cdot \alpha^{-1} \\ &= \alpha \cdot id \cdot \alpha^{-1} \\ &= id\end{aligned}$$

□

## 5.4 Winkelsumme

**Definition 5.16** (Winkelsumme). Wir notieren mit  $\angle e$  den Innenwinkel von  $D$  an einer Ecke  $e$ . Betrachten wir nun den elliptischen Kreis  $\epsilon = e_0 \rightarrow e_1 \rightarrow \dots \rightarrow e_{n-1}$  der Ecke  $e = e_0$ , dann definieren wir die *Winkelsumme des elliptischen Kreises*  $\epsilon$  als

$$\text{sum}(\epsilon) = \angle e_0 + \dots + \angle e_{n-1}.$$

Klar ist, dass die Winkelsumme unabhängig davon ist, an welcher Ecke wir beginnen. Daher lässt sich allgemein  $\text{sum}(\epsilon)$  für die Winkelsumme eines elliptischen Kreises schreiben.

**Proposition 5.17.** Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe mit Dirichlet Polygon  $D$  und allen Seiten in  $\mathbb{H}$  und sei  $\epsilon$  ein elliptischer Kreis. Dann existiert eine ganze Zahl  $m_\epsilon \geq 1$ , sodass

$$m_\epsilon \text{sum}(\epsilon) = 2\pi.$$

In anderen Worten: die Winkelsumme teilt  $2\pi$ .

*Beweis.* Wir orientieren uns wieder am Beweis von Katok [Kat92, Thm.3.5.3.]. Sei  $\epsilon = e_0 \rightarrow e_1 \rightarrow \dots \rightarrow e_{n-1}$  ein elliptischer Kreis, d.h. es existieren Abbildungen in  $\Gamma$ , welche die Ecken gegenseitig aufeinander abbilden. Seien also  $e_0, \dots, e_{n-1}$  die Ecken mit Innenwinkeln  $\angle e_i = \theta_i$ . Sei  $H = \{id, r, r^2, \dots, r^{m-1}\} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(e_0) = e_0\}$ , der *Stabilisator* von  $e_0$ , der eine endliche, zyklische Untergruppe von  $\Gamma$  darstellt. Genauer wird dieser durch  $\gamma_{e,s}$  erzeugt und hat

somit endliche Ordnung  $m_\epsilon$ . Wir sehen, dass nun  $r^p(D)$  für  $0 \leq p \leq m - 1$  eine Ecke in  $e_0$  mit Winkel  $\theta_0$  besitzt. Angenommen, nun gilt  $t_k(e_k) = e_0$  für ein  $t_k \in \Gamma$ . Dann ist die Menge aller Elemente, die  $e_k$  auf  $e_0$  abbilden, gegeben durch  $H \circ t_k$ , eine Menge, die ebenfalls  $m$  Elemente besitzt, also haben alle  $r^p t_k(D)$  in  $e_0$  eine Ecke mit Winkel  $\theta_k$ .

Auf der anderen Seite gilt, falls ein Gebiet  $a(D)$ ,  $a \in \Gamma$  in  $e_0$  eine Ecke hat, dass  $a^{-1}(e_0) \in D$  und somit  $a^{-1}(e_0) = e_i$  ist, für ein  $i$  mit  $0 \leq i \leq n - 1$ . Damit ist aber  $a \in H \circ t_i$  und  $a(D)$  also in einer der oben beschriebenen Translationen enthalten.

Es existieren also  $m \cdot n$  Gebiete, die  $e_0$  umgeben. Diese Gebiete sind jedoch alle verschieden, denn wenn  $r^p t_k(D) = r^q t_0(D)$ , so gilt  $r^p t_k = r^q t_0$  und somit  $r = q$  und  $k = 0$  ( $r^p t_k = r^q t_0 \Leftrightarrow t_k = r^{q-p} t_0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow q = p$ ). Folglich hat man durch diese  $m \cdot n$  Abbildungen eine vollständige Parkettierung der Umgebung von  $e_0$  gegeben. Da diese einen Winkel von  $2\pi$  aufweist, gilt also

$$m_\epsilon(\theta_0 + \dots + \theta_{n-1}) = 2\pi$$

□

**Bemerkung 5.18.** Erinnern wir uns daran, dass ein elliptischer Kreis zufällig heißt, falls die assoziierte elliptische Kreistransformation die Identität ist. Offensichtlich hat diese Ordnung 1. Somit gilt, falls  $\epsilon$  ein zufälliger elliptischer Kreis ist: die Ordnung  $m_\epsilon = 1$  und die Winkelsumme  $\text{sum}(\epsilon) = 2\pi$ .

## 6 Freie Gruppen

Wie bereits in den ersten Kapiteln gesehen, ist es möglich für gegebene Gruppen eine Menge von Erzeugern anzugeben. Allgemein gibt es die Möglichkeit, Gruppen unter der Angabe von Erzeugern und Relationen darzustellen. Um später Poincarés Satz über Fuchsische Gruppen zu verstehen, benötigen wir genau diese abstraktere Darstellung von freien Gruppen, die wir in diesem Kapitel einführen.

## 6.1 Die seitenpaarenden Transformationen generieren eine Fuchssche Gruppe

Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe,  $z_0 \in \mathbb{H}$  und sei  $D_\Gamma(z_0)$  ein Dirichlet Polygon für  $\Gamma$ . In Kapitel 5 haben wir gesehen, wie zu  $D_\Gamma(z_0)$  einer Menge an seitenpaarenden Transformationen assoziiert ist. Seitenpaarende Transformationen spielen nun eine wichtige Rolle aufgrund des folgenden Satzes:

**Satz 6.1.** *Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe,  $z_0 \in \mathbb{H}$ . Angenommen,  $D := D_\Gamma(z_0)$  ist ein Dirichlet Polygon. Dann erzeugt die Menge der seitenpaarenden Transformationen von  $D_\Gamma(z_0)$  die Gruppe  $\Gamma$ .*

*Beweis.* Wir folgen wieder dem Beweis von Katok [Kat92, Thm. 3.5.4.]. Sei  $\{t_i, i \in I\}$  die Menge der seitenpaarenden Transformationen und  $S = \langle t_i \rangle$  die durch die seitenpaarenden Transformationen erzeugte Untergruppe von  $\Gamma$ . Wir wollen nun zeigen, dass  $S$  bereits  $\Gamma$  entspricht.

Hierzu wählen wir eine Transformation  $r_1 \in S$  und wissen, dass ein  $r_2 \in \Gamma$  existiert, sodass  $r_1(D)$  und  $r_2(D)$  eine benachbarte Seite  $s' = r_1(s)$  mit  $s \subset D$  besitzen. Dann ist aber  $r_1^{-1}(r_2(D))$  benachbart zu  $D$ , denn  $r_1^{-1}(r_2(s)) = r_1^{-1}(r_1(s)) = s$  und folglich eine Seite von  $D$  und  $r_1^{-1}(r_2(D))$ . Da die benachbarten Polygone aber durch die seitenpaarenden Transformationen erzeugt werden, gilt  $r_1^{-1} \circ r_2 = t_k$  für ein  $t_k \in \{T_i\}$ . Damit gilt aber, dass  $r_2 = r_1 \circ t_k \in S$ .

Nun nehmen wir an,  $r_3(D)$  berührt  $r_1(D)$  in einer Ecke  $e$ . Dann schneidet  $r_1^{-1}r_3(D)$  das Dirichlet-Polygon  $D$  in einer Ecke  $d = r_1^{-1}(e)$ . Da aber lokale Endlichkeit vorliegt, kann es nur endlich viele Flächen mit Ecke  $d$  geben.  $D$  kann also mit  $r_1^{-1}r_3(D)$  verbunden werden durch eine endliche Kette an Flächen in der Art, dass zwei aufeinanderfolgende Flächen eine gemeinsame Seite haben. Somit kann man das obige Argument anwenden und erhält analog, dass  $r_3$  ebenfalls in  $S$  liegt.

Sei nun  $X = \bigcup_{r \in S} r(D)$ ,  $Y = \bigcup_{r \in \Gamma \setminus S} r(D)$ . Dann sind  $X$  und  $Y$  disjunkt, auf-

grund der exakten Invarianz unter der Identität in  $\Gamma$  eines Dirichlet Polygons und es gilt  $X \cup Y = \mathbb{H}$ . Da  $X \neq \emptyset$  und  $\mathbb{H}$  zusammenhängend ist, genügt es nun also zu zeigen, dass  $X$  und  $Y$  abgeschlossene Teilmengen von  $\mathbb{H}$  sind, denn dann folgt automatisch, dass  $X = \mathbb{H}$  und  $Y = \emptyset$  gelten muss. Folglich würde  $S$  bereits alle Translationen von  $\Gamma$  enthalten und da die Erzeugergruppe  $S$  Untergruppe von  $\Gamma$  ist, wäre die Gleichheit gezeigt.

Zeigen wir nun, dass jede Vereinigung  $\bigcup v_j(D)$  von Flächen  $D$  einer Parkettierung abgeschlossen ist. Angenommen  $\{z_i\}$  ist eine gegen  $z_0 \in \mathbb{H}$  konvergierende Folge in  $\bigcup v_j(D)$ . Dann ist  $z_0 \in t(D)$  für ein  $t \in \Gamma$  und es existiert nach Proposition 3.12 eine Umgebung  $U$  von  $z_0$ , die nur endlich viele der  $v_j(D)$  schneidet. Somit muss eine dieser Flächen der endlichen Familie,  $v_m(D)$ , eine Teilfolge von  $\{z_i\}$  enthalten, die gegen  $z_0$  konvergiert. Da  $v_m(D)$  abgeschlossen ist, gilt also  $z_0 \in v_m(D) \subseteq \bigcup v_j(D)$  und damit ist  $\bigcup v_j(D)$  abgeschlossen. Genauer bedeutet das, dass auch  $X$  und  $Y$  abgeschlossen sind.  $\square$

**Beispiel 6.2.** Betrachten wir die Gruppe  $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Dann haben wir in Abschnitt 4.3 gesehen, dass das Fundamentalgebiet zu  $\Gamma$  die Form  $D_\Gamma(z_0) = \{z \in \mathbb{H} \mid -1/2 < \mathrm{Re}(z) < 1/2, |z| > 1\}$  hat, für ein  $z_0 = k \cdot i, k > 1$  beliebig. Außerdem sieht man, dass die seitenpaarenden Transformationen  $z \mapsto z + 1$  (und dessen inverse Transformation  $z \mapsto z - 1$ ), sowie  $z \mapsto -1/z$  sind. Aus dem Satz folgt nun, dass die Gruppe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  durch die Transformationen  $z \mapsto z + 1$  und  $z \mapsto -1/z$  erzeugt wird.  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  lässt sich also schreiben als  $\langle z \mapsto z + 1, z \mapsto -1/z \rangle$ .

Im Gegenzug zu dieser Herangehensweise, das heißt eine Gruppe zu wählen und nach Erzeugern zu suchen, kann man auch andersherum an das Problem herangehen. Man beginnt also mit einer abstrakten Menge an Erzeugern und einer Menge an Relationen und nutzt diese Informationen, um eine Gruppe zu beschreiben.

## 6.2 Die Definition freier Gruppen

Sei  $S$  eine endliche Menge mit  $k$  Symbolen. Falls nun  $a \in s$  ein Symbol ist, so führen wir ein anderes Symbol  $a^{-1}$  ein und nennen die Menge solcher Symbole  $S^{-1}$ .

Wir suchen nun nach allen Verbindungen von Symbolen aus  $S \cup S^{-1}$ , unter der Bedingung, dass Verbindungen der Form  $aa^{-1}$  und  $a^{-1}a$  wegfallen. Wir nennen jede endliche Verbindung von  $n$  Symbolen ein Wort der Länge  $n$ . Definiere also

$$\begin{aligned} W_n &= \{\text{alle Wörter der Länge } n\} \\ &= \{w_n = a_1 \cdot \dots \cdot a_n \mid a_j \in S \cup S^{-1}, a_{j\pm 1} \neq a_j^{-1}\} \end{aligned}$$

Wir nennen  $e$  das leere Wort (das Wort, das aus keinen Symbolen besteht) und definieren, um es einheitlich zu halten,  $W_0 = \{e\}$ .



Falls  $w_n$  und  $w_m$  Worte sind, dann können wir ein neues Wort  $w_n w_m$  von der maximalen Länge  $n + m$  durch Verkettung formen: falls  $w_n = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$  und  $w_m = b_1 \cdot \dots \cdot b_m$ , dann gilt

$$w_n w_m = a_1 \cdot \dots \cdot a_n b_1 \cdot \dots \cdot b_m$$

Falls nun  $b_1 = a_n^{-1}$  gilt, so entfernen wir den Ausdruck  $a_n b_1$  vom Produkt. Genauso fahren wir mit  $b_2$  und  $a_{n-1}^{-1}, \dots$  fort und entfernen den Term, falls die Symbole jeweils gleich sind.

**Definition 6.3** (die freie Gruppe). Sei  $S$  eine endliche Menge mit  $k$  Elementen. Wir definieren

$$F_k = \bigcup_{n \geq 0} W_n,$$

die Menge aller endlichen Worte (unter der Bedingung, dass das Symbol  $a$  niemals auf ein  $a^{-1}$  folgt beziehungsweise von einem solchen gefolgt wird), als die *freie Gruppe über  $k$  Erzeugern*.

Wir zeigen nun, dass dies eine Gruppe definiert, in der die Verknüpfung die Verkettung von Wörtern ist:

- (i) Die Verknüpfung ist wohldefiniert, da, wie wir oben gesehen haben, die Verkettung zweier Wörter ein neues Wort bilden.
- (ii) Die Verkettung ist assoziativ. Der Beweis hierfür ist intuitiv klar, rigoros jedoch schwerer zu beweisen.

*Beweis.* Seien  $w_i = a_1 \dots a_i$ ,  $w_j = b_1 \dots b_j$  und  $w_k = c_1 \dots c_k$  Wörter in  $F_k$ . Dann ist offensichtlich, dass die Assoziativität gilt, falls  $a_i \neq b_1^{-1}$  und  $b_j \neq c_1^{-1}$ . Falls jedoch eine Gleichheit erfüllt ist, so fallen diese Elemente weg. Man sieht nun, dass beliebig ist, von welcher Seite diese wegfallen. Dies beweist Artin rigoros in seinem Buch [Art93], auf das wir hier verweisen möchten.  $\square$

- (iii) Existenz der Identität: das leere Wort  $e$ , welches aus keinen Symbolen besteht, bildet die Identität. Falls  $w = a_1 \dots a_n \in F_n$ , dann gilt  $we = ew = w$ .
- (iv) Existenz der inversen Elemente: Falls  $w = a_1 \dots a_n \in F_n$  ein Wort ist, so ist  $w^{-1} = a_n^{-1} \dots a_1^{-1}$  das dazu gehörige inverse Element, sodass gilt  $ww^{-1} = w^{-1}w = e$ .

### 6.3 Erzeuger und Relationen

Wir nennen  $F_k$  die freie Gruppe, da das Gruppenprodukt frei ist: es heben sich keine Symbole gegenseitig auf (außer der notwendigen Bedingung, dass  $aa^{-1} = a^{-1}a = e$  für jedes Symbol  $a \in S$  gilt). Wir können somit eine breite Menge an Gruppen durch die Einführung von Relationen erhalten. Eine *Relation* ist ein Wort, welches wir als identisch mit der Identität setzen. Wenn wir ein Gruppenelement also als Verkettung von verschiedenen Symbolen schreiben, so dürfen wir jedes Auftreten einer Relation kürzen.

**Definition 6.4** (Erzeuger und Relationen). Sei  $S = \{a_1, \dots, a_k\}$  eine endliche Menge an Symbolen und seien  $w_1, \dots, w_m$  eine endliche Anzahl an Wörtern. Dann definieren wir die Gruppe

$$\Gamma = \langle a_1, \dots, a_k \mid w_1 = \dots = w_m = e \rangle \quad (6.1)$$

als die Menge aller Wörter mit Symbolen aus  $S \cup S^{-1}$ , unter der Bedingung, dass (i) jedes Teilwort der Form  $aa^{-1}$  oder  $a^{-1}a$  entfernt wird, und (ii) jedes Auftreten der Teilwörter  $w_1, \dots, w_m$  entfernt wird. Somit kann jedes Auftreten der Worte  $w_1, \dots, w_m$  ersetzt werden durch das leere Wort  $e$ , d.h. der Identität in der Gruppe. Wir nennen eine solche Gruppe  $\Gamma$  die *Gruppe mit Erzeugern  $a_1, \dots, a_k$  und Relationen  $w_1, \dots, w_m$* .

**Definition 6.5.** Wir sagen, dass eine Gruppe  $\Gamma$  *endlich darstellbar* ist, falls sie in der obigen Form mit endlich vielen Erzeugern und endlich vielen Relationen geschrieben werden kann. Wir nennen einen Ausdruck der Form (6.1) eine Darstellung von  $\Gamma$ .

**Beispiel 6.6.** Trivialerweise ist die Freie Gruppe über  $k$  Erzeugern endlich darstellbar.

## 7 Der Satz von Poincaré

In den ersten Kapiteln starteten wir mit einer konkreten Fuchsschen Gruppe, um ein Dirichlet Polygon, sowie eine Menge an seitenpaarenden Transformationen zu konstruieren. Nun wollen wir den umgekehrten Fall betrachten. Das heißt, wir starten mit einem konvexen hyperbolischen Polygon und einer Menge an seitenpaarenden Transformationen und wollen uns fragen, wann diese seitenpaarenden Transformationen eine Fuchssche Gruppe erzeugen.

Allgemein wird die generierte Gruppe nicht diskret und somit keine Fuchsche Gruppe sein. Jedoch wird die Gruppe unter natürlichen Bedingungen diskret sein.

**Definition 7.1** (elliptische Kreisbedingung). Wir sagen, dass ein elliptischer Kreis  $\epsilon$  die *elliptische Kreisbedingung* erfüllt, falls eine ganze Zahl  $m \geq 1$  in Abhängigkeit von  $\epsilon$  existiert, sodass

$$m \operatorname{sum}(\epsilon) = 2\pi \tag{7.1}$$

gilt. Hierbei ist beliebig, welche Ecke des Kreises als Startpunkt gewählt wird.

Wir kommen nun zur zentralen Aussage dieser Bachelorarbeit, dem Satz von Poincaré, der auf den vorherigen Kapiteln aufbaut. Zusammengefasst sagt dieser uns, dass, falls jeder elliptische Kreis die elliptische Kreisbedingung erfüllt, die seitenpaarenden Transformationen eine Fuchssche Gruppe generieren. Des Weiteren sagt er uns, wie man die Gruppe in Form von Erzeugern und Relationen schreiben kann.

**Satz 7.2** (Poincarés Satz). *Sei  $P$  ein konvexes hyperbolisches Polygon mit endlich vielen Seiten, dessen Ecken alle in  $\mathbb{H}$  liegen. Angenommen  $P$  ist ausgestattet mit einer Sammlung  $\Phi$  von seitenpaarenden Möbiustransformationen, wobei keine Seite von  $P$  mit sich selbst gepaart wird.*

*Angenommen, die elliptischen Kreise sind  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r$  und jeder von diesen erfüllt die elliptische Kreisbedingung 7.1, d.h. für jedes  $\epsilon_j$  existiert eine ganze Zahl  $m_j \geq 1$ , sodass*

$$m_j \operatorname{sum}(\epsilon_j) = 2\pi.$$

*Dann gilt:*

- (i) Die Untergruppe  $G = \langle \Phi \rangle$ , die durch  $\Phi$  erzeugt wird, ist eine Fuchssche Gruppe;*
- (ii)  $P$  ist ein Fundamentalgebiet für die Wirkung der Fuchsschen Gruppe  $G$  auf  $\mathbb{H}$ ;*
- (iii) Die Fuchssche Gruppe  $G$  kann wie folgt in Form von Erzeugern und Relationen geschrieben werden; Für jeden elliptischen Kreis  $\epsilon_j$ , wähle eine dazu korrespondierende elliptische Kreistransformation  $\gamma_j = \gamma_{e,s}$  (für eine Ecke  $e$  des elliptischen Kreises  $\epsilon$ ). Dann ist  $G$  isomorph zu der*

Gruppe mit Erzeugern  $\gamma_s \in \Phi$  (d.h. wir betrachten  $\Phi$  als eine Menge von Symbolen), und Relationen  $\gamma_j^{m_j}$ :

$$G = \langle \gamma_s \in \Phi \mid \gamma_1^{m_1} = \gamma_2^{m_2} = \dots = \gamma_r^{m_r} = e \rangle$$

*Beweis.* Da der Beweis zu umfassend für diese Bachelorarbeit ist, möchten wir auf Theorem 9.8.4 aus [Bea83] verweisen. Die Aussage ist zwar etwas anders formuliert, besagt allerdings das Gleiche, was wir nun zeigen wollen.

Die Voraussetzungen die Beardon setzt sind analog zu unseren:

1. Aussage (A6)' beschreibt genau die elliptische Kreisbedingung. Sie besagt, dass man für jede Ecke genau eine Parkettierung der Umgebung von  $x$  erhält, wenn man die Translationen der elliptischen Kreistransformation anwendet. Zudem gibt sie an, wie die Relationen gewählt werden, um die Gruppe in (iii) darzustellen.
2. Aussage (A7) zeigt, dass alle Ecken innerhalb von  $\mathbb{H}$  liegen müssen.

□

**Bemerkung 7.3.** Die Relationen in (iii) erscheinen abhängig davon, welches Paar  $(e, s)$  des elliptischen Kreises  $e_j$  genutzt wird, um  $\gamma_j$  zu definieren. Tatsächlich ist die Relation  $\gamma_j^{m_j}$  unabhängig von der Wahl von  $(e, s)$ . Dies folgt aus Bemerkung 5.10: falls  $e'$  eine andere Ecke auf dem selben elliptischen Kreis wie  $e$  ist, dann ist  $\gamma_{e',s'}$  entweder zu  $\gamma_{e,s}$  oder zu  $\gamma_{e,s}^{-1}$  konjugiert.

**Bemerkung 7.4.** Die Bedingung, dass  $D$  keine Seite hat, die mit sich selbst gepaart wird, ist keine echte Einschränkung. Denn falls wir eine Seite haben, die mit sich selbst gepaart wird, so können wir auf dessen Mitte eine neue Ecke einführen. Diese teilt die Seite in zwei kleinere Seiten, die dann gepaart werden.

Genauer:

Angenommen dass  $s$  eine Seite mit seitenpaarender Transformation  $\gamma_s$  ist, die  $s$  mit sich selbst paart. Des Weiteren habe  $s$  die Ecken  $e_0$  und  $e_1$ . Nun führe eine neue Ecke  $e_2$  am Mittelpunkt von  $[e_0, e_1]$  ein. Bemerke, dass  $\gamma_s(e_2) = e_2$  gilt und  $\gamma_s(e_0) = e_1$  sowie  $\gamma_s(e_1) = e_0$  gelten muss, da ansonsten  $\gamma_s$  die Identität wäre. Sei nun  $s_1$  die Seite  $[e_0, e_2]$  und  $s_2$  die Seite  $[e_2, e_1]$ . Dann gilt  $\gamma_s(s_1) = s_2$  und  $\gamma_s(s_2) = s_1$ . Somit paart  $\gamma_s$  die Seiten  $s_1$  und  $s_2$ . Wir bemerken auch, dass der Innenwinkel an der Ecke  $e_2$  gleich  $\pi$  ist, da die Tangenten an diesem Punkt sich zu einer Geraden ergänzen.

## 7.1 Darstellung anhand von Beispielen

Nun wollen wir den Satz von Poincaré anhand zweier Beispiele illustrieren.

**Beispiel 7.5.** Wir betrachten das folgende Hexagon, dessen Ecken alle in  $\mathbb{H}$  liegen.

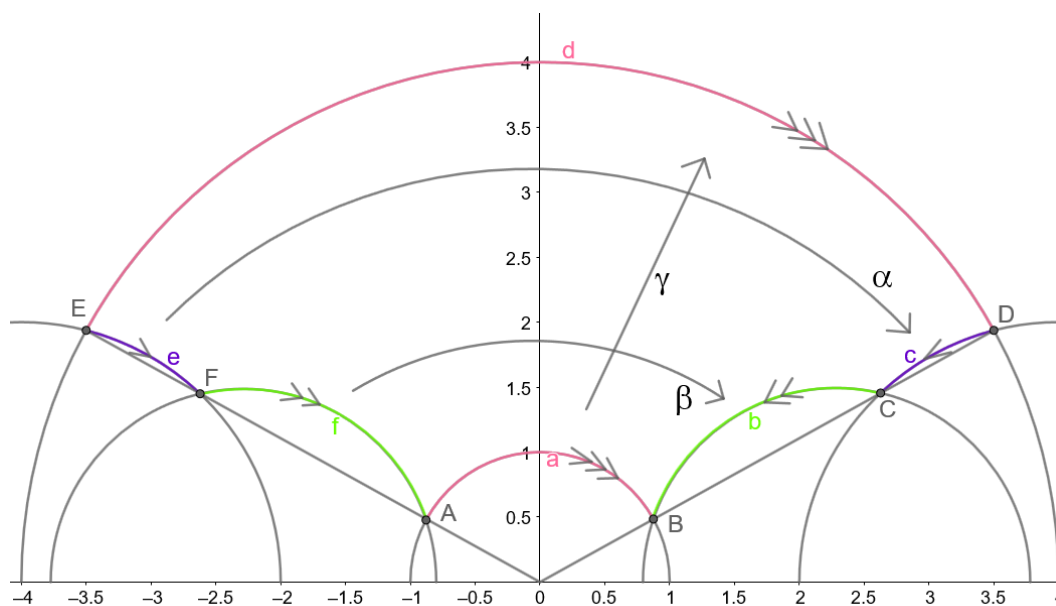


Abbildung 6: Ein hyperbolisches Hexagon mit den dazugehörigen seitenpaarenden Transformationen

Die hier angegebenen seitenpaarenden Transformationen induzieren zwei elliptische Kreise:

1.  $\epsilon_1 : A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow B$  mit der zugehörigen elliptischen Kreistransformation  $\gamma_{A,a} = \beta^{-1}\gamma^{-1}\alpha\gamma$  mit Ordnung  $m_{A,a}$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix} & \xrightarrow{\gamma} & \begin{pmatrix} E \\ d \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} E \\ e \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} D \\ c \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} D \\ d \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} B \\ a \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} B \\ b \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} A \\ f \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix}
 \end{array}$$

2.  $\epsilon_2 : F \rightarrow C$  mit der zugehörigen elliptischen Kreistransformation  $\gamma_{F,f} = \beta\alpha^{-1}$  mit Ordnung  $m_{F,f}$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} F \\ f \end{pmatrix} & \xrightarrow{\beta} & \begin{pmatrix} C \\ b \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} C \\ c \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} F \\ e \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} F \\ f \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Nach Poincarés Satz gilt also:

Falls die Innenwinkelsumme der Winkel an  $A, B, D, E$ , sowie die der Winkel an  $C, F$  den Wert  $2\pi$  teilen, so ist

$$\Gamma = \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \gamma_{A,a}^{m_{A,a}} = \gamma_{F,f}^{m_{F,f}} = id \rangle$$

eine Fuchssche Gruppe und das Hexagon ein Fundamentalgebiet für die Wirkung von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$ .

Es lassen sich in diesem konkreten Beispiel sogar die Kreistransformationen berechnen:

Für Gamma ist offensichtlich, dass es sich um eine Streckung handelt:

$$\gamma(z) = 4z$$

Für die anderen beiden Abbildung handelt es sich um Spiegelungen, die mit Verschiebungen verknüpft werden. Wir verschieben zunächst die Gerade, so dass der Mittelpunkt im Ursprung liegt. Daraufhin normieren wir auf den Radius 1 und spiegelt. Anschließend können wir auf den Ursprungsradius strecken und daraufhin auf den neuen Mittelpunkt verschieben.

$$\alpha(z) = \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{0.5(z+4)}\right)\right) + 4 = \frac{4z+12}{z+4}$$

$$\beta(z) = \left(r \cdot \left(-\frac{1}{\frac{1}{r}(z+m)}\right)\right) + m = \frac{mz + m^2 - r^2}{z+m},$$

wobei  $m$  der Abstand vom Mittelpunkt der Geraden  $f$  zum Ursprung ist und  $r$  der Radius des Halbkreises.

**Beispiel 7.6.** Auch an einem hyperbolischen Viereck können wir dies zeigen und erkennen zudem, dass für diesen Fall die elliptische Kreisbedingung erfüllt ist:

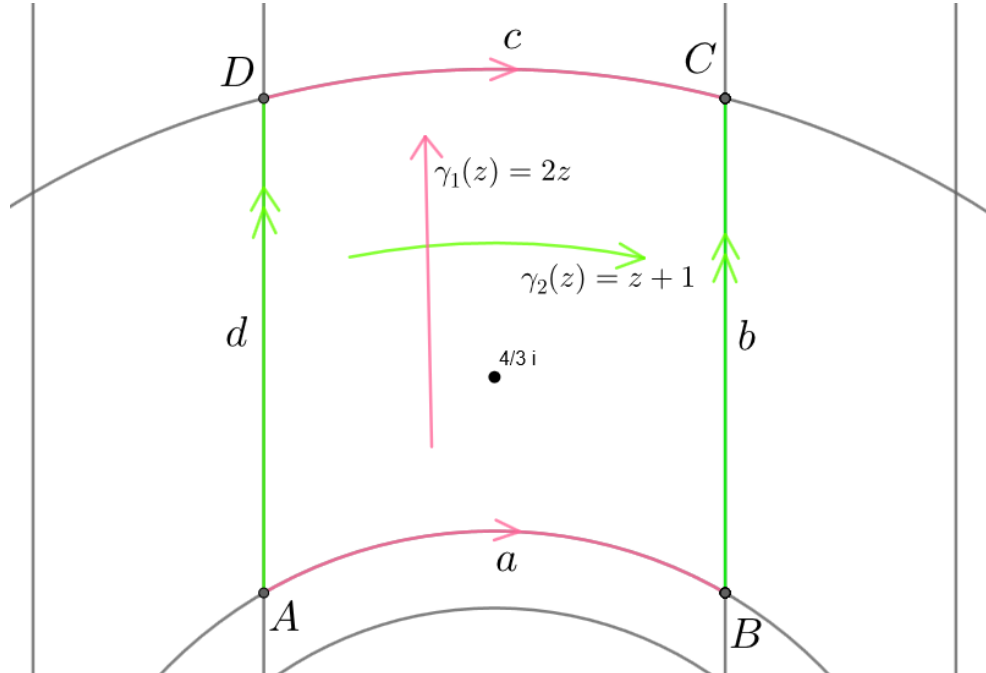


Abbildung 7: Das hyperbolische Viereck wird durch A,B,C,D bestimmt

Die hier angegebenen Transformationen induzieren einen elliptischen Kreis  $\epsilon : A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$  mit der zugehörigen elliptischen Kreistransformation  $\gamma_{A,a} = \gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_2\gamma_1$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix} &\xrightarrow{\gamma_1} \begin{pmatrix} D \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} D \\ d \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\gamma_2} \begin{pmatrix} C \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} C \\ c \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\gamma_1^{-1}} \begin{pmatrix} B \\ a \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} B \\ b \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\gamma_2^{-1}} \begin{pmatrix} A \\ d \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In diesem Beispiel sieht man zusätzlich, dass die Innenwinkel sich aufgrund der Winkelbeziehungen zu  $2\pi$  ergänzen. Somit erzeugen die Abbildungen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  eine Fuchssche Gruppe.

$$\Gamma = \langle \gamma_1(z) = 2z, \gamma_2(z) = z + 1 \rangle$$

## 8 Ausblick: Die Riemannsche Fläche $\mathbb{H}/\Gamma$

In diesem Kapitel möchten wir die Relevanz unserer Ergebnisse anhand eines möglichen Anwendungsgebietes zeigen. Da dies nur einen Ausblick darstellen soll, möchten wir auf rigorose Beweise und nähere Erklärungen verzichten. Bei Interesse lässt sich dies jedoch unter anderem in [Kat92] nachlesen.

Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe, die auf der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$  wirkt, sodass  $\mu(\mathbb{H}/\Gamma)$  endlich ist, und  $F$  ein Fundamentalgebiet für die Wirkung von  $\Gamma$ . Die Gruppe  $\Gamma$  induziert eine natürliche Projektion (stetig und offen)  $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma$ , und die Punkte in  $\mathbb{H}/\Gamma$  sind die Bahnen von  $\Gamma$ . Die Einschränkung von  $\pi$  auf  $F$  identifiziert die kongruenten Punkte von  $F$ , die auf Grund der exakten Invarianz zum Rand von  $\partial F$  gehören und macht aus  $F/\Gamma$  eine orientierte Fläche mit möglicherweise ein paar *markierten Punkten* (welche den elliptischen Kreisen von  $F$  entsprechen) und *Spitzen* (welche den nicht-kongruenten Ecken von  $F$  im Unendlichen entsprechen), auch bekannt als Orbifoldigkeit. Dessen topologische Art ist bestimmt durch die Zahl der



Spitzen und durch dessen Geschlecht (die Zahl der Henkel, wenn man die Fläche in Form der Sphäre mit Henkeln betrachtet). Falls  $F$  lokal endlich ist, so ist der Quotientenraum  $\mathbb{H}/\Gamma$  homöomorph zu  $F/\Gamma$ . Somit kann man die topologische Art von  $\mathbb{H}/\Gamma$  bestimmen, indem wir ein Dirichlet Gebiet  $F$  wählen, welches lokal endlich ist.

Mit Hilfe des Satzes von Gauss-Bonnet lässt sich nun zeigen, dass, falls alle Ecken vollständig in  $\mathbb{H}$  liegen, der Flächeninhalt eines Polygons ausschließlich von der Zahl der Ecken sowie der Größe der Innenwinkel abhängt. Da Möbiustransformationen winkelerhaltend sind, ist der Flächeninhalt für Fundamentalpolygone für die Wirkung von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$  konstant. Somit ist der Flächeninhalt eine Invariante der Gruppe  $\Gamma$ . Da das Gebiet auf dem Quotientenraum  $\mathbb{H}/\Gamma$  induziert wird durch den hyperbolischen Flächeninhalt auf  $\mathbb{H}$ , ist der hyperbolische Flächeninhalt von  $\mathbb{H}/\Gamma$ , notiert mit  $\mu(\mathbb{H}/\Gamma)$ , wohldefiniert und gleich  $\mu(F)$  für jedes Fundamentalgebiet  $F$ . Falls  $\Gamma$  ein kompaktes Dirichlet Gebiet  $F$  besitzt, dann besitzt  $F$  endlich viele Seiten und der Quotientenraum  $\mathbb{H}/\Gamma$  ist kompakt. Es lässt sich zudem zeigen, dass, falls ein Dirichlet Gebiet für  $\Gamma$  kompakt ist, so sind alle Dirichlet Gebiete kompakt. Falls zusätzlich  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$  ohne Fixpunkte wirkt, so ist  $\mathbb{H}/\Gamma$  eine kompakte Riemannsche Fläche, d.h. eine 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und seine Fundamentalgruppe ist isomorph zu  $\Gamma$ .

Ein solches Fundamentalpolygon  $F$  lässt sich wie jede Riemannsche Fläche triangulieren, um die Euler-Charakteristik

$$\chi(F) = \#\text{Ecken} - \#\text{Kanten} + \#\text{Flächen} = 2 - 2g$$

und damit auch das Geschlecht  $g$  der Fläche zu bestimmen. Hierbei ist es besonders interessant, dass für jedes  $g > 1$  eine Fuchssche Gruppe  $\Gamma$  existiert, sodass  $\mathbb{H}/\Gamma$  eine Riemannsche Fläche von Geschlecht  $g$  ist.

Anhand von Beispiel 7.6 wollen wir nun eine solche Triangulierung veranschaulichen.

**Definition 8.1.** Eine *Triangulierung* einer Riemannschen Fläche  $X$  ist eine Aufspaltung von  $X$  in Dreiecke, sodass zwei Dreiecke disjunkt sind, oder sich in einer einzigen Seite oder einer Ecke schneiden.

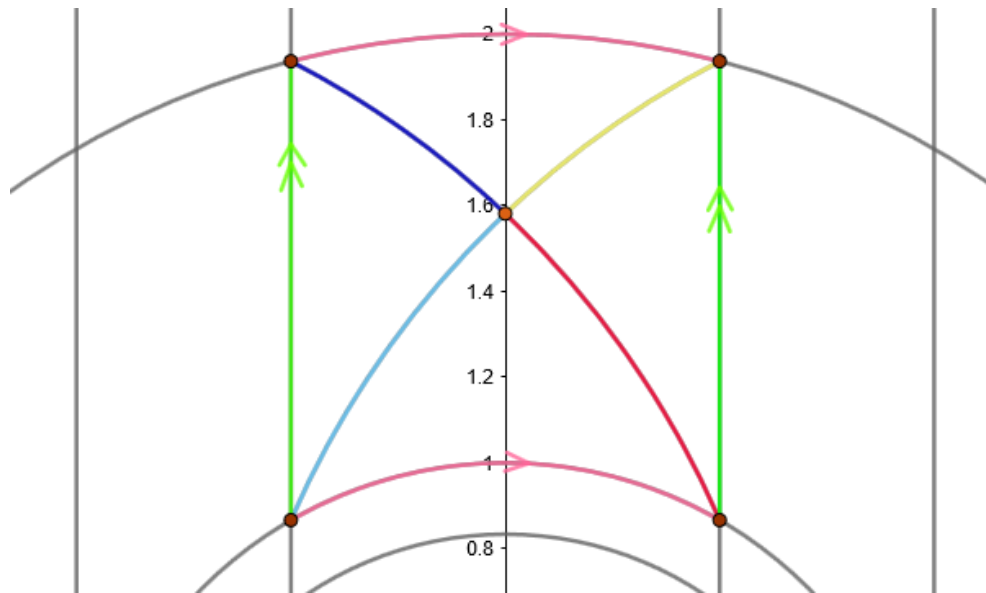


Abbildung 8: Eine Triangulierung des hyperbolischen Vierecks  $P$ , begrenzt durch die mit Pfeilen versehenen Seiten aus Beispiel 7.6

**Beispiel 8.2.** Wir erkennen, dass sich in diesem Falle keine angrenzenden Dreiecke in mehr als einer Seite schneiden. Zudem liegen, nach der Identifizierung der gleichfarbigen Seiten und Ecken, 2 Ecken, 6 Kanten und 4 Flächen vor. Wir können die Euler-Charakteristik also berechnen als

$$\chi(P) = 2 - 6 + 4 = 0 = 2 - 2 \cdot 1.$$

Somit hat diese Riemannsche Fläche das Geschlecht  $g = 1$  und ist isomorph zu einem Torus.

Allgemein ist die Erzeugung Fuchsscher Gruppen sehr nützlich, um nicht-triviale Riemannsche Flächen erzeugen und untersuchen zu können. Somit ist der Satz von Poincaré nicht nur äußerst interessant, sondern von großer Bedeutung für viele Bereiche der Mathematik und dessen Anwendungsbereiche.

## Literatur

- [And99] ANDERSON, James W.: *Hyperbolic geometry*. London [u.a.] : Springer, 1999. – ISBN 1852331569
- [Art93] ARTIN, Michael: *Algebra, Übersetzung des englischen Originals von 1991 durch Annette A'Campo*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993
- [Bea83] BEARDON, Alan F.: *The geometry of discrete groups*. Springer, 1983. – ISBN 387907882
- [Kat92] KATOK, Svetlana: *Fuchsian groups*. Chicago [u.a.] : Univ. of Chicago Pr., 1992. – ISBN 0226425835
- [Wal19] WALKDEN, Charles: *MATH32052 Hyperbolic Geometry lecture notes*. 2019

## Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Bachelorarbeit eigenständig verfasst habe. Außer den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln habe ich keine weiteren verwendet.

Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer anderen Prüfung noch nicht vorgelegt worden.

Essen, den 22.07.2019