

Universität Duisburg-Essen

Fakultät für Mathematik

Studiengang Wirtschaftsmathematik

Bachelorarbeit zum Thema:

**Diskrete Gruppenwirkungen auf Riemannschen Flächen  
und deren Quotienten**

zur Erlangung des Grades Bachelor of Science

vorgelegt von

Cedric Kouayep Nguepnang

vorgelegt am: 26.07.2019  
Matrikelnummer: 3048784  
Fachsemester: 6

Erstgutachter: Prof. Dr. Daniel Greb  
Zweitgutachter: Dr. Martin Schwald

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Topologie und Gruppentheorie</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Eigentlich diskontinuierliche Gruppenwirkungen</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Motivation</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Kleinsche Kurve</b>	<b>15</b>
5.1	Die Riemannschen Flächen $X_p$ und $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$ . . . . .	15
5.2	Nichttriviale Stabilisatoren in $PSL_2(\mathbb{Z})$ und Fundamentalgebiete	20
5.3	Exkurs: Algebraische Topologie . . . . .	25
5.4	Existenz von $\overline{X}_p$ . . . . .	31

## 1 Einleitung

Diese Bachelorarbeit ist in drei Teile gegliedert. Im ersten Teil rekapitulieren wir einige Grundbegriffe aus der Topologie und Gruppentheorie, welche für diese Arbeit besonders relevant sind. Anschließend werden wir eine Konstruktionsmethode für Riemannsche Flächen diskutieren. Dazu betrachten wir eine Riemannsche Fläche  $X$  und eine auf ihr *holomorph und eigentlich diskontinuierlich* wirkende Gruppe  $G$ . Wir werden beweisen, dass  $X/G$  auch eine Riemannsche Fläche ist. Darauf folgend werden wir im dritten Teil dieses Resultat verwenden, um die sogenannten Modulkurven einzuführen. Dies sind kompakte Riemannsche Flächen von Geschlecht  $g \geq 2$ , welche sich als die Kompaktifizierung des Quotienten von  $\mathbb{H}$  nach bestimmten Untergruppen von  $PSL_2(\mathbb{Z})$  realisieren lassen. Adolf Hurwitz hat bewiesen, dass  $84(g - 1)$  eine obere Schranke der Kardinalität der Automorphismengruppe einer kompakten Riemannschen Fläche  $Y$  von Geschlecht  $g \geq 2$  ist, wobei wir hier mit Automorphismen biholomorphe Abbildungen  $Y \rightarrow Y$  meinen. Die Zahl  $84(g - 1)$  nennt man in diesem Zusammenhang auch Hurwitz-Schranke. Aus diesem Grund interessieren wir uns bei der Konstruktion der Modulkurven allen voran für die Kleinsche Kurve  $\overline{X}_7$ . Es handelt sich hierbei um eine Riemannsche Fläche von Geschlecht 3, deren Automorphismengruppe 168 Elemente besitzt, sprich die Anzahl der Elemente der Automorphismengruppe von  $\overline{X}_7$  erreicht die Hurwitz-Schranke. Solche Kurven nennt man Hurwitz-Kurven. Der Beweis, dass die Kardinalität der Automorphismengruppe von  $\overline{X}_7$  168 beträgt, beendet diese Bachelorarbeit.

Vom Leser wird erwartet, dass dieser mit den Grundkenntnissen der Funktionentheorie und der Theorie über Riemannsche Flächen vertraut ist.

## 2 Topologie und Gruppentheorie

In diesem Kapitel werden wir einige Begriffe aus der Topologie und Gruppentheorie notieren, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit eine zentrale Rolle einnehmen werden. Die meisten Begriffe dürften dem Leser vertraut sein, weswegen wir meist Abstand davon nehmen, ausführliche Beispiele zu diskutieren. Die Definitionen und Beispiele haben wir den Büchern [Mir95] von Rick Miranda, [Don11] von Simon Donaldson und [tomDieck08] von Tammo tom Dieck entnommen.

**Definition 2.1.** Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathcal{T})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und einem System  $\mathcal{T}$  von Teilmengen von  $X$ , das folgende Eigenschaften erfüllt:

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ ,  $X \in \mathcal{T}$ .
- Falls  $U, V \in \mathcal{T}$ , so ist auch  $U \cap V \in \mathcal{T}$ .
- Sei  $I$  eine Indexmenge. Falls  $U_i \in \mathcal{T}$  für jedes  $i \in I$ , so ist  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ .

Unter den obigen drei Bedingungen ist  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $X$  und die Mengen in  $\mathcal{T}$  nennen wir die **offenen Mengen** von  $X$  bzgl. der Topologie  $\mathcal{T}$ . Die Komplemente der offenen Mengen in  $X$  nennen wir die **abgeschlossenen Mengen** von  $X$  bzgl.  $\mathcal{T}$ . Meist unterdrückt man die Topologie  $\mathcal{T}$  und bezeichnet einfach  $X$  als topologischen Raum.

Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt **Hausdorff**, falls zu je zwei ungleichen Elementen  $x, y \in X$  offene Mengen  $U, V \in \mathcal{T}$  existieren, sodass  $x \in U$ ,  $y \in V$  und  $U \cap V = \emptyset$  gilt.

Wie der Titel dieser Arbeit bereits vermuten lässt, sind für uns vor allem die **diskrete Topologie** und die **Quotiententopologie** von Interesse.

**Definition 2.2.** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt **diskret**, falls  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ . Dies bedeutet, dass jede Teilmenge von  $X$  bezüglich  $\mathcal{T}$  offen ist.

Wir bezeichnen mit  $X$  im restlichen Kapitel einen topologischen Raum.

**Definition 2.3.** Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen zwei topologischen Räumen  $X$  und  $Y$  heißt **stetig**, falls für jede offene Menge  $O \subseteq Y$  gilt:  $f^{-1}(O) \subseteq X$  ist offen.

$f$  heißt **Homöomorphismus**, falls  $f$  bijektiv und die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  von  $f$  ebenfalls stetig ist.

**Definition 2.4.**  $X$  heißt **zusammenhängend**, falls gilt:

$M \subseteq X$  ist offen und abgeschlossen  $\implies M = \emptyset$  oder  $M = X$ .

$K \subseteq X$  heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung von  $K$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

**Definition 2.5.** Sei  $Y$  ein topologischer Raum. Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt **eigentlich**, falls  $f^{-1}(K)$  für jede kompakte Teilmenge  $K \subseteq Y$  kompakt ist.

**Beispiel 2.6.**

- (1) Homöomorphismen  $f : X \rightarrow Y$  sind stets eigentlich.
- (2) Falls  $X$  und  $Y$  kompakt sind, so sind stetige Abbildungen  $g : X \rightarrow Y$  immer eigentlich.
- (3) Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  eigentlich. Dann ist  $g \circ f$  eigentlich.

**Definition 2.7.** Sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Für  $x \in X$  heißt  $[x] := \{y \in X \mid x \sim y\}$  Äquivalenzklasse von  $x$ . Des Weiteren definieren wir  $X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$ . Sei  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  die kanonische Projektion. Die **Quotiententopologie** auf  $X/\sim$  ist durch

$$\mathcal{T} := \{V \subseteq X/\sim \mid \pi^{-1}(V) \text{ offen}\}$$

gegeben. Mit anderen Worten:  $V \subseteq X/\sim$  ist offen  $\Leftrightarrow \pi^{-1}(V) \subseteq X$  ist offen. Per Konstruktion ist  $\pi$  stetig bezüglich  $\mathcal{T}$ .

**Definition 2.8.** Eine Teilmenge  $D \subseteq X$  heißt **diskret**, falls zu jedem  $x \in D$  eine Umgebung  $U \subseteq X$  existiert, sodass  $U \cap D = \{x\}$ .

**Beispiel 2.9.**

- (1) Sei  $X$  diskret. Dann ist jede Teilmenge von  $X$  diskret.
- (2) Jede endliche Teilmenge von  $\mathbb{C}$  ist diskret.
- (3) Teilmengen diskreter Mengen sind diskret.
- (4) Sei  $X$  ein Hausdorff-Raum und  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  sei eine gegen  $x \in X$  konvergente Folge, sodass  $p_n \neq x$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  diskret.

**Definition 2.10.** Eine **topologische Gruppe** ist ein Tripel  $(G, m, \mathcal{T})$  bestehend aus einer Gruppe  $(G, m)$  mit einer Multiplikation

$$m : G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto m(g, h) = gh$$

und einer Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $G$ , sodass die Abbildungen  $m$  und

$$l : G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$$

bzgl.  $\mathcal{T}$  stetig sind.

Wir werden meist eine topologische Gruppe  $(G, m, \mathcal{T})$  einfach mit  $G$  und das neutrale Element aus  $G$  mit  $e$  beschreiben.

Wir nennen eine Gruppe  $G$  zusammen mit der diskreten Topologie auf  $G$  eine **diskrete Gruppe**.

**Beispiel 2.11.**

- (1) Das Tripel  $(\mathbb{K}^n, +, \mathcal{T})$  ist eine topologische Gruppe.  $\mathcal{T}$  sei hier die Standardtopologie auf  $\mathbb{K}^n$ , wobei  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

- (2) Sei  $(GL_2(\mathbb{K}), \cdot)$  die Gruppe der invertierbaren  $(2,2)$ -Matrizen mit Einträgen in  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Die Menge der  $(2,2)$ -Matrizen  $M_2(\mathbb{K})$  mit Werten in  $\mathbb{K}$  ist ein zu  $\mathbb{K}^4$  isomorpher Vektorraum. Betrachte den Isomorphismus

$$\Phi : M_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^4 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

und versehe  $\mathbb{K}^4$  mit der durch die euklidischen Norm induzierten Topologie. Dann definiert  $\mathcal{T} := \{O \subseteq M_2(\mathbb{K}) \mid \Phi(O) \subseteq \mathbb{K}^4 \text{ offen}\}$  eine Topologie auf  $M_2(\mathbb{K})$ . Da die Determinantenabbildung  $\det : M_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  stetig und  $\mathbb{K}^\times$  offen ist, ist  $\det^{-1}(\mathbb{K}^\times)$  offen. Es gilt  $GL_2(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^\times)$  und somit ist  $GL_2(\mathbb{K})$  offen. Versehe anschließend  $GL_2(\mathbb{K})$  mit der Teilraumtopologie  $\bar{\mathcal{T}} := \{O \cap GL_2(\mathbb{K}) \mid O \text{ ist offen in } M_2(\mathbb{K})\}$ . Man bemerke hier, dass die Matrixmultiplikation und -inversion stetig sind, da diese durch rationale Funktionen gegeben sind. Daher ist das Tripel  $(GL_2(\mathbb{K}), \cdot, \bar{\mathcal{T}})$  eine topologische Gruppe.

- (3)  $SL_2(\mathbb{Z}) := \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$  ist zusammen mit der durch  $M_2(\mathbb{R})$  induzierten Topologie, wie sie in (2) definiert wurde, und der Matrixmultiplikation eine diskrete Gruppe. Die Diskretheit von  $SL_2(\mathbb{Z})$  werden wir an einer anderen Stelle nachweisen.

**Definition 2.12.** Sei  $G$  eine Gruppe. Eine **Gruppenwirkung** von  $G$  auf  $X$  ist eine Abbildung  $G \times X \rightarrow X$ ,  $(g,p) \mapsto g \cdot p$ , die folgende Eigenschaften erfüllt:

- $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$  für alle  $g, h \in G$  und  $p \in X$
- $e \cdot p = p$  für jedes  $p \in X$

Falls  $G$  zusätzlich eine topologische Gruppe ist, nennen wir die Gruppenwirkung von  $G$  auf  $X$  **stetig**, falls für alle  $g \in G$  die Abbildung  $\psi_g : X \rightarrow X$ ,  $p \mapsto g \cdot p$ , stetig ist. Wir nennen  $\psi_g$  die durch  $g$  induzierte Abbildung.

Falls  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $\psi_g$  holomorph ist, heißt die Gruppenwirkung von  $G$  auf  $X$  **holomorph**.

**Beispiel 2.13.**

- (1) Sei  $\{\omega_1, \omega_2\}$  eine  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\mathbb{C}$ . Setze  $\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  und betrachte die Abbildung  $\Gamma \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(\gamma, x) \mapsto \gamma + x$ . Diese Abbildung ist eine holomorphe Gruppenwirkung auf  $\mathbb{C}$ .
- (2) Sei  $G \subseteq D := \{\phi : X \rightarrow X \mid \phi \text{ Homöomorphismus}\}$  eine Untergruppe. Dann ist die Abbildung  $G \times X \rightarrow X$ ,  $(g,p) \mapsto g(p)$ , eine stetige Gruppenwirkung. Falls wir fordern, dass  $X$  eine Riemannsche Fläche ist und die Abbildungen in  $D$  biholomorph sind, ist diese Gruppenwirkung sogar holomorph.

Mit  $G$  beschreiben wir fortan eine Gruppe, die auf  $X$  wirkt.

**Definition 2.14.** Mit  $G \cdot p := \{g \cdot p \mid g \in G\}$ ,  $p \in X$ , bezeichnen wir den **Orbit** von  $p$ . Für  $U \subseteq X$  definieren wir die Mengen  $g \cdot U := \{g \cdot u \mid u \in U\}$  und  $G \cdot U := \{g \cdot u \mid g \in G, u \in U\}$ . Wir nennen  $G_p := \{g \in G \mid g \cdot p = p\}$  die **Stabilisatorengruppe** von  $p$  und jedes Element aus  $G_p$  heißt **Stabilisator** von  $p$ . Der **Kern**  $K$  dieser Gruppenwirkung ist der Schnitt aller Stabilisatorengruppen. Das heißt, dass  $K = \{g \in G \mid g \cdot p = p \forall p \in X\}$ . Wir nennen die Gruppenwirkung von  $G$  auf  $X$  **effektiv**, falls  $K = \{e\}$ .

**Bemerkung 2.15.**

- (1) *Notation: Wir werden die Multiplikationspunkte weglassen. Das heißt mit  $gp$  meinen wir  $g \cdot p$  ect.*
- (2) *Die Gruppenwirkungen in Beispiel 2.11 sind effektiv.*
- (3) *Falls  $p, q \in X$  im selben Orbit sind, dann gibt es ein  $g \in G$ , sodass  $q = gp$  und es gilt dann sowohl  $G_q = gG_p g^{-1}$  als auch  $|G_q| = |G_p|$ .*
- (4) *Falls  $G$  endlich ist, so gilt  $|G| = |Gx| |G_x|$  für jedes  $x \in X$ .*
- (5) *Falls  $G$  effektiv ist und stetig auf  $X$  wirkt, dann induzieren  $g$  und  $\tilde{g}$  unterschiedliche Homöomorphismen  $X \rightarrow X$ , sofern  $g \neq \tilde{g}$ , denn  $g \neq \tilde{g}$  impliziert, dass  $g^{-1}\tilde{g} \neq e$ . Falls jedoch  $g$  und  $\tilde{g}$  dieselbe Abbildung induzieren, dann fixiert die durch  $g^{-1}\tilde{g}$  induzierte Abbildung jeden Punkt in  $X$ . Dies ist ein Widerspruch dazu, dass  $G$  effektiv auf  $X$  wirkt.*

**Definition 2.16.** Sei  $G$  eine diskrete Gruppe, die effektiv auf einen Hausdorff-Raum  $X$  wirkt. Wir sagen, dass  $G$  **eigentlich diskontinuierlich** auf  $X$  wirkt, falls zu je zwei Punkten  $p, q \in X$  Umgebungen  $U, V \subseteq X$  von  $p$  bzw.  $q$  existieren, sodass  $\{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\}$  endlich ist.

**Bemerkung 2.17.**

- (1) *Wir fordern bei der Definition nicht, dass  $p$  und  $q$  ungleich sein müssen.*
- (2) *Untergruppen von  $G$  wirken eigentlich diskontinuierlich auf  $X$ .*
- (3) *Endliche diskrete Gruppen, die effektiv auf einen Hausdorff-Raum  $X$  wirken, wirken eigentlich diskontinuierlich auf  $X$ .*

Nachdem wir alle Grundbegriffe, die für das Verständnis dieser Arbeit unabdingbar sind, eingeführt haben, können wir nun damit beginnen, eigentlich diskontinuierliche Gruppenwirkungen zu diskutieren.

### 3 Eigentlich diskontinuierliche Gruppenwirkungen

Das Ziel dieses Kapitels ist es, den folgenden Satz zu beweisen.

**Satz 3.1.** *Sei  $G$  eine Gruppe, die holomorph und eigentlich diskontinuierlich auf eine Riemannsche Fläche  $X$  wirkt. Dann trägt  $X/G$  die Struktur einer Riemannschen Fläche, die kanonische Projektion  $\pi : X \rightarrow X/G$  ist eine holomorphe Abbildung und es gilt  $\text{mult}_p(\pi) = |G_p|$  für jedes  $p \in X$ . Zusätzlich gilt, falls  $X$  kompakt ist, dass  $X/G$  kompakt ist.*

Wir werden uns bei diesem Beweis am Buch [Mir95], Kapitel III.3, von Rick Miranda orientieren. Dieser führt den Beweis nur für endliche Gruppen durch, jedoch lässt sich das Prinzip, welches er bei seinem Beweis verwendet, auf unsere Situation übertragen. Zunächst müssen wir hingegen die Gültigkeit einiger Hilfssätze nachweisen. Sofern nicht anders angegeben, ist  $X$  im Folgenden stets ein topologischer Raum.

**Lemma 3.2.** *Sei  $G$  eine Gruppe, die stetig auf  $X$  wirkt. Dann ist die kanonische Projektion  $\pi : X \rightarrow X/G$  offen.*

*Beweis.* Sei  $U \subseteq X$  offen. Wir müssen nun zeigen, dass  $\pi(U)$  offen ist. Nach der Definition der Quotiententopologie ist  $\pi(U)$  genau dann offen, wenn

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$$

offen ist. Da  $G$  stetig auf  $X$  wirkt, sind die Abbildungen  $X \rightarrow X$ ,  $p \mapsto gp$ ,  $g \in G$ , Homöomorphismen. Homöomorphismen sind offene Abbildungen, weswegen  $gU$  für jedes  $g \in G$  und jede offene Menge  $U \subseteq X$  offen ist. Demnach ist  $\pi^{-1}(\pi(U))$  als Vereinigung offener Mengen offen.  $\square$

Von nun an sei im Rest dieses Kapitels  $X$  ein Hausdorff-Raum und  $G$  eine auf  $X$  eigentlich diskontinuierlich wirkende Gruppe.

Beim Beweis des folgenden Lemmas lieferten die Notizen [Sch15] von Rich Schwarz die Idee zur Konstruktion der Mengen  $\hat{U}$  und  $\hat{V}$ , die im Beweis des Lemmas auftauchen.

**Lemma 3.3.**  *$X/G$  ist ein Hausdorff-Raum.*

*Beweis.* Seien  $p = \pi(x)$  und  $q = \pi(y) \in X/G$  ungleich,  $x, y \in X$ . Gesucht sind Umgebungen  $\hat{U}$  von  $x$  und  $\hat{V}$  von  $y$ , sodass  $\pi(\hat{U}) \cap \pi(\hat{V}) = \emptyset$ . Nach Lemma 3.2 sind  $\pi(\hat{U})$  und  $\pi(\hat{V})$  offen, sofern  $\hat{U}$  und  $\hat{V}$  offen sind. Falls ein  $r \in \pi(\hat{U}) \cap \pi(\hat{V})$  existiert, dann existieren  $u \in \hat{U}$  und  $v \in \hat{V}$ , sodass  $Gu = Gv$ . Dies bedeutet, dass ein  $g \in G$  existiert, sodass  $gu = v$ . Unser Ziel ist es demnach,  $\hat{U}$  und  $\hat{V}$  so zu konstruieren, dass  $g\hat{U} \cap \hat{V} = \emptyset$  für jedes  $g \in G$  gilt.

Da  $G$  eigentlich diskontinuierlich auf  $X$  wirkt, existieren Umgebungen  $U$  von  $x$  und  $V$  von  $y$ , sodass  $\{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\}$  endlich ist.



Wir setzen  $\{g_1, \dots, g_n\} := \{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\}$ . Für  $g \in G \setminus \{g_1, \dots, g_n\}$  gilt bereits  $gU \cap V = \emptyset$ . Wir wollen nun  $U$  und  $V$  verkleinern, sodass  $g_i \hat{U} \cap \hat{V} = \emptyset$  für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt, wobei natürlich  $\hat{U} \subseteq U$  und  $\hat{V} \subseteq V$  gelte.

Sei nun  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Es gilt  $\pi(x) \neq \pi(y)$  und somit  $Gx \neq Gy$ , was bedeutet, dass  $gx \neq y$  für jedes  $g \in G$  gilt. Somit existieren Umgebungen  $U_i$  von  $g_i x$  und  $V_i$  von  $y$ , sodass  $U_i \cap V_i = \emptyset$ , weil  $X$  Hausdorff ist. Setze:  $\hat{U}_i := U \cap g_i^{-1} U_i$  und  $\hat{V}_i := V \cap V_i$ . Dies sind offenbar Umgebungen von  $x$  bzw.  $y$ . Daher sind auch

$$\hat{U} := \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} \hat{U}_i \text{ und } \hat{V} := \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} \hat{V}_i$$

Umgebungen von  $x$  bzw.  $y$ . Wenn wir nun zeigen können, dass  $g\hat{U} \cap \hat{V} = \emptyset$  für jedes  $g \in G$  gilt, ist der Beweis, wie eingangs argumentiert, erbracht.

Falls  $i \in \{1, \dots, n\}$ , ist  $g_i \hat{U} \cap \hat{V} \subseteq g_i \hat{U}_i \cap \hat{V}_i \subseteq \hat{U}_i \cap \hat{V}_i = \emptyset$ , woraus folgt, dass  $g_i \hat{U} \cap \hat{V} = \emptyset$ . Falls  $g \in G \setminus \{g_1, \dots, g_n\}$ , gilt  $g\hat{U} \cap \hat{V} \subseteq gU \cap V = \emptyset$ . Dies impliziert, dass  $g\hat{U} \cap \hat{V} = \emptyset$ .  $\square$

**Lemma 3.4.** *Für jedes  $p \in X$  ist  $G_p$  endlich.*

*Beweis.* Sei  $p \in X$ . Nach Definition 2.16 existieren Umgebungen  $U$  und  $V$  von  $p$ , sodass  $\{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\}$  endlich ist. Nun ist  $p \in U \cap V$  und  $p = gp \in gU$  für jedes  $g \in G_p$ , weshalb  $G_p \subseteq \{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\}$ . Somit ist  $G_p$  endlich.  $\square$

Nachdem wir nun sichergestellt haben, dass  $G_p$  für jeden Punkt  $p \in X$  endlich ist, folgt ein Lemma, das für diese Bachelorarbeit fundamental ist, weil es dabei behilflich sein wird, im Beweis von Satz 3.1 komplexe Karten auf  $X/G$  zu konstruieren.

**Lemma 3.5.**  *$G$  wirke eigentlich diskontinuierlich und stetig auf  $X$ . Dann gilt:*

- (i) *Zu jedem  $p \in X$  gibt es eine  $G_p$ -invariante Umgebung  $U$ , sodass  $U \cap gU = \emptyset$  für alle  $g \notin G_p$ .*
- (ii)  *$U$  kann so gewählt werden, dass  $\alpha : U/G_p \rightarrow X/G$ ,  $G_p x \mapsto Gx$ , die Menge  $U/G$  homöomorph auf eine offene Menge in  $X/G$  abbildet.*

*Beweis.* Zu(i): Sei  $p \in X$ . Da  $G$  eigentlich diskontinuierlich auf  $X$  wirkt, existiert eine offene Umgebung  $V$  von  $p$ , sodass  $M := \{g \in G \mid gV \cap V \neq \emptyset\}$  endlich ist. Wir definieren  $M \setminus G_p := \{g_1, \dots, g_n\}$ . Es gilt nun  $g_i p \neq p$  für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ , weshalb wir zu jedem  $i$ , da  $X$  Hausdorff ist, offene Umgebungen  $V_i$  von  $p$  und  $W_i$  von  $g_i p$  finden, sodass  $V_i \cap W_i = \emptyset$ . Offenbar ist  $g_i^{-1} W_i$  für jedes  $i$  eine offene Umgebung von  $p$ , weil  $G$  stetig auf  $X$  wirkt. Wir betrachten

$$R_i := V \cap V_i \cap (g_i^{-1} W_i), \quad R := \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} R_i \text{ und } U := \bigcap_{g \in G_p} gR.$$

Man bedenke, dass es sich bei der Definition von  $U$  um einen Schnitt von endlich vielen Mengen handelt, da  $G_p$  nach Lemma 3.4 endlich ist, weshalb  $U$  als Schnitt endlich vieler offener Mengen offen ist. Offensichtlich ist  $R_i$  eine offene Umgebung von  $p$  und somit sind sowohl  $R$  als auch  $U$  offene Umgebungen von

$p$ . Zudem gilt  $gU = U$  für jedes  $g \in G_p$ , da die Multiplikation eines Elements aus  $G_p$  mit  $U$  nur die Mengen in der Definition von  $U$  permutiert. Es bleibt zu zeigen, dass  $gU \cap U = \emptyset$  für jedes  $g \in G \setminus G_p$  gilt. Dies rechnet man leicht wie folgt nach:

$R_i \cap (g_i R_i) \subseteq V_i \cap W_i = \emptyset$  und somit folgt  $R \cap (g_i R) = \emptyset$  für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ , woraus  $U \cap (g_i U) = \emptyset$  für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  folgt. Für  $g \in G \setminus M$  gilt  $gU \cap U \subseteq gV \cap V = \emptyset$ .

Zu (ii): Zunächst zeigen wir, dass  $\alpha$  injektiv ist. Seien dazu  $u, v \in U$  und  $G_p u, G_p v \in U/G_p$ , sodass  $\alpha(G_p u) = \alpha(G_p v)$ . Daraus folgt, dass  $Gu = Gv$  und somit gibt es ein  $g \in G$ , sodass  $u = gv$ . Dies impliziert, dass  $U \cap gU \neq \emptyset$ . Nach der Konstruktion von  $U$  muss  $g$  in  $G_p$  liegen, weshalb  $G_p u = G_p v$  folgt. Damit ist  $\alpha$  injektiv. Als Nächstes beweisen wir, dass  $\alpha$  stetig ist. Sei dazu  $V \subseteq X/G$  offen.  $\pi : X \rightarrow X/G$  und  $\hat{\pi} : U \rightarrow U/G_p$  seien die jeweiligen kanonischen Projektionen von  $X$  nach  $X/G$  bzw.  $U$  nach  $U/G_p$ . Offenbar ist  $\varphi := \pi|_U = \alpha \circ \hat{\pi}$ .  $\varphi$  ist stetig, weswegen  $\varphi^{-1}(V)$  offen ist und somit ist  $\hat{\pi}^{-1}(\alpha^{-1}(V)) = (\alpha \circ \hat{\pi})^{-1}(V) = \varphi^{-1}(V)$  offen. Aus der Definition der Quotiententopologie auf  $U/G$  folgt sofort, dass  $\alpha^{-1}(V)$  offen ist. Damit folgt, dass  $\alpha$  stetig ist.

Auf ähnliche Weise zeigen wir, dass  $\alpha$  offen ist. Sei  $\hat{V} \subseteq U/G_p$ . Nach Definition der Quotiententopologie gibt es ein  $V \subseteq U$ , sodass  $\hat{V} = \hat{\pi}(V)$ . Da  $\varphi$  offen ist, ist auch  $\varphi(V)$  offen und somit ist  $\alpha(\hat{V}) = \alpha(\hat{\pi}(V)) = (\alpha \circ \hat{\pi})(V) = \varphi(V)$  offen. Daher ist  $\alpha$  offen. Es folgt also insgesamt, dass  $\alpha$  die Menge  $U/G$  homöomorph auf sein Bild in  $X/G$  abbildet.  $\square$

**Bemerkung 3.6.** Aus Lemma 3.5(ii) folgt unmittelbar, dass, falls  $|G_p| = 1$ , eine Umgebung  $U$  von  $p$  und  $V$  von  $Gp \in X/G$  existiert, sodass  $\pi|_U : U \rightarrow V$  ein Homöomorphismus ist.

**Lemma 3.7.** Sei  $G$  eine Gruppe, die holomorph und eigentlich diskontinuierlich auf eine Riemannsche Fläche  $X$  wirkt. Dann ist die Menge der Punkte in  $X$ , die einen nichttrivialen Stabilisator in  $G$  haben, diskret.

*Beweis.* Angenommen,  $D := \{p \in X \mid \exists g \in G \setminus \{e\} : gp = p\}$  ist nicht diskret. Dann gibt es ein  $x \in X$  und eine Folge  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D \setminus \{x\}$ ,  $p_n \neq p_m$ , falls  $n \neq m$ , die gegen  $x$  konvergiert. Wir setzen  $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}, g_n p_n = p_n, g_n \subseteq G \setminus \{e\}\}$ .

Nach Lemma 3.5(i) existiert eine  $G_x$ -invariante Umgebung  $U$  von  $x$ , sodass  $U \cap gU = \emptyset$  für jedes  $g \notin G_x$ . ( $\star$ )

Es gibt ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $p_n \in U$  für jedes  $n \geq n_0$  gilt, weil  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$  konvergiert. Demnach gilt für alle  $n \geq n_0$ :  $p_n \in U \cap g_n U$  und somit  $U \cap g_n U \neq \emptyset$ . Nach ( $\star$ ) müssen demnach die  $g_n$  mit  $n \geq n_0$  in  $G_x$  liegen. Lemma 3.4 besagt, dass  $G_x$  endlich ist, weswegen  $\{g_n \mid n \geq n_0\}$  endlich ist.  $\{p_n \mid n \geq n_0\}$  hat unendlich viele Elemente, weshalb es ein Element  $g \in \{g_n \mid n \geq n_0\}$  geben muss, das unendlich viele Elemente aus  $\{p_n \mid n \geq n_0\}$  fixiert. Man bemerke, dass  $g \neq e$  gilt. Daraus ergibt sich, dass  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge  $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$  besitzt, sodass alle Elemente dieser Teilfolge von  $g$  fixiert werden. Die Teilfolge  $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$  konvergiert als Teilfolge einer gegen  $x$  konvergenten Folge gegen  $x$ .  $G$  wirkt holomorph, also insbesondere stetig, auf  $X$ , weswegen die Abbildung  $\varphi : X \rightarrow X$ ,  $p \mapsto gp$ ,

stetig ist, woraus folgt, dass  $\varphi(x) = x$ .  $\varphi$  ist sogar holomorph und stimmt auf der nicht-diskreten Menge  $M := \{p_m \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$  mit der Identität auf  $X$  überein, weshalb  $\varphi = id_X$  nach dem Identitätssatz ist. Da  $G$  effektiv auf  $X$  wirkt, folgt  $g = e$ , was ein Widerspruch ist.  $\square$

**Korollar 3.8.** *Sei  $G$  eine Gruppe, die eigentlich diskontinuierlich und holomorph auf eine Riemannsche Fläche  $X$  wirkt. Dann kann man in Lemma 3.5 von  $U$  noch zusätzlich fordern, dass kein Punkt in  $U$  außer  $p$  von einem nicht-trivialen Element in  $G_p$  fixiert wird.*

*Beweis.* Da die Menge der Punkte in  $X$ , die einen nicht-trivialen Stabilisator in  $G$  besitzen, nach Lemma 3.7 diskret ist, kann man  $U$  einfach um diese Punkte, falls notwendig, reduzieren.  $\square$

Nun werden wir den Satz 3.1 beweisen:

*Beweis.* Zunächst versehen wir  $X/G$  mit der Quotiententopologie. Nach Lemma 3.3 ist  $X/G$  ein Hausdorff-Raum. Da die kanonische Projektion  $\pi : X \rightarrow X/G$  stetig,  $X$  zusammenhängend und  $\pi(X) = X/G$  ist, ist  $X/G$  zusammenhängend. Als Nächstes konstruieren wir einen Atlas auf  $X/G$ . Sei dazu  $\bar{p} \in X/G$ . Es gilt zudem  $\bar{p} = Gp$  für ein  $p \in X$ . Wir setzen  $m := |G_p|$  und unterscheiden zwischen zwei Fällen.

Fall 1:  $m = 1$

Diese Bedingung bedeutet, dass der Stabilisator von  $p$  trivial ist. Da  $O/\{e\} \cong O$  für jede offene Menge  $O \subseteq X$ , impliziert Lemma 3.5(ii), dass eine Umgebung  $U$  von  $p$  und  $W$  von  $\bar{p}$  existieren, sodass  $\pi|_U : U \rightarrow W$  ein Homöomorphismus ist. Indem wir gegebenenfalls  $U$  verkleinern, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $U$  ein Gebiet einer Karte  $\phi : U \rightarrow V$  auf  $X$  ist.  $\psi = \phi \circ \pi|_U^{-1} : W \rightarrow V$  ist als Komposition von Homöomorphismen ein Homöomorphismus und somit eine Karte auf  $X/G$ .

Fall 2:  $m \geq 2$

Nach Lemma 3.5(ii) und Korollar 3.8 existieren eine  $G_p$ -invariante Umgebung  $U$  von  $p$  und eine Umgebung  $W$  von  $\bar{p}$ , sodass die natürliche Abbildung  $\alpha : U/G_p \rightarrow W$  ein Homöomorphismus ist und kein Punkt in  $U$  außer  $p$  von einem nichttrivialen Element aus  $G_p$  fixiert wird. Jedes Element aus  $(U/G_p) \setminus (\{G_p p\})$  hat unter  $\beta : U \rightarrow U/G_p, x \rightarrow G_p x$ , genau  $m$  Urbilder, weil kein Element aus  $U \setminus \{p\}$  einen nichttrivialen Stabilisator in  $G_p$  besitzt. Man bemerke, dass  $G_p p = \{p\}$ . Da  $G$  holomorph auf  $X$  wirkt, induziert jedes Element  $g \in G$  eine biholomorphe Abbildung durch die Abbildungsvorschrift  $x \mapsto gx, x \in X$ . Wir bezeichnen den durch  $g \in G$  induzierten Automorphismus mit demselben Buchstaben. Sei  $\psi : \hat{U} \rightarrow \hat{V}$  eine Karte auf  $X$  mit  $p \in \hat{U}$  und  $\psi(p) = 0$ . Für jedes  $g \in G_p$  hat  $\tilde{g}(z) := \psi(g(z)) = \psi(gz), z \in \hat{U} \cap U$ , Multiplizität 1 in  $p$ , denn sowohl  $\psi$  als auch  $g$  sind injektiv, womit auch  $\tilde{g}$  injektiv ist. Setze nun

$$h(z) := \prod_{g \in G_p} \tilde{g}(z), z \in \hat{U} \cap U.$$

$h$  ist als Produkt holomorpher Funktionen holomorph. Man bemerke, dass  $h$  Multiplizität  $m = |G_p|$  in  $p$  hat und in einer  $G_p$ -invarianten Umgebung von  $p$  definiert ist. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $h$  auf  $U$  definiert ist. Ansonsten verkleinern wir  $U$  geeignet.  $h$  ist  $G_p$ -invariant, denn sei  $f \in G_p$ , dann gilt:

$$h(f(z)) = \prod_{g \in G_p} \tilde{g}(f(z)) = \prod_{g \in G_p} \psi((g \circ f)(z)) = \prod_{g \in G_p} \psi(g(z)) = h(z).$$

Die vorletzte Gleichung gilt, da das Verknüpfen von  $f$  mit den Elementen aus  $G_p$  nur dazu führt, dass die Faktoren in der Definition von  $h$  permutiert werden, da  $f \in G_p$  und fest gewählt wurde und es sich hierbei um ein Produkt von endlich vielen Faktoren handelt. Wir definieren nun

$$\bar{h} : U/G_p \rightarrow \mathbb{C}, \quad G_p z \mapsto h(z).$$

Die Wohldefiniertheit von  $\bar{h}$  folgt aus der  $G_p$ -Invarianz von  $h$ . Zudem ist  $\bar{h}$  stetig und offen, weil  $h$  als holomorphe Funktion stetig und offen ist. Wir begründen nun, dass  $\bar{h}$  injektiv ist:

Seien  $G_p x, G_p z \in U/G_p \setminus (\{G_p p\})$ , sodass  $\bar{h}(G_p z) = \bar{h}(G_p x)$ . Das heißt  $h(z) = h(x)$ . Da  $\text{mult}_p(h) = m$  und  $h(z) \neq h(p)$ , folgt, dass  $|N| = m$ , wobei  $N := \{y \in U : h(y) = h(z)\}$ . Angenommen,  $G_p z$  ist ungleich  $G_p x$ . Aus  $G_p z \neq G_p p$  folgt  $|M| = m$ , wobei  $M := \{y \in U : G_p y = G_p z\}$  (siehe Anmerkung zu  $\beta$  zu Beginn von Fall 2). Nach Definition von  $\bar{h}$  gilt  $M \subseteq N$ . Da  $G_p z \neq G_p x$ , gilt  $x \notin M$  und somit  $|M \cup \{x\}| = m + 1$ .  $x$  liegt in  $N$  und somit folgt  $M \cup \{x\} \subseteq N$ , weswegen  $|N| \geq m + 1$ . Dies ist ein Widerspruch. Das heißt, dass  $G_p z = G_p x$ .

Seien nun  $G_p z, G_p p \in U/G_p$ , sodass  $\bar{h}(G_p z) = \bar{h}(G_p p)$ . Dann folgt  $h(z) = h(p) = 0$ , denn für alle  $g \in G_p$  gilt:  $\tilde{g}(p) = \psi(g(p)) = \psi(gp) = \psi(p) = 0$ . Man bedenke, dass

$$h(z) = 0 \iff \exists g \in G_p : \tilde{g}(z) = 0 \iff \exists g \in G_p : \psi(g(z)) = 0.$$

Da  $\psi$  und  $g$  injektiv sind,  $\psi(p) = 0$  und  $g(p) = p$ , ist  $h(z) = 0$  äquivalent dazu, dass  $z = p$ . Daher gilt  $G_p z = G_p p$ .

Damit haben wir die Injektivität von  $h$  nachgewiesen.

$\bar{h}$  ist stetig, offen und injektiv, woraus folgt, dass  $\bar{h} : U/G \rightarrow \bar{h}(U/G_p) := V \subseteq \mathbb{C}$  ein Homöomorphismus ist. Nun können wir eine Karte auf  $X/G$  wie folgt definieren:

$$\phi : W \xrightarrow{\alpha^{-1}} U/G_p \xrightarrow{\bar{h}} V$$

Offenbar überdecken diese Definitionsbereiche  $X/G$ , da wir an jedem Punkt von  $X$  eine Karte definieren. Jetzt müssen wir noch zeigen, dass diese Karten paarweise miteinander verträglich sind. Karten, welche gemäß Fall  $i$  konstruiert wurden, nennen wir hier Karten vom Typ  $i$ , wobei  $i \in \{1, 2\}$ .

Lemma 3.7 besagt, dass die Menge der Punkte in  $X$  mit nichttrivialem Stabilisator diskret ist. Daher können wir annehmen, dass die Definitionsbereiche von je zwei Karten vom Typ 2 disjunkt sind. Dies bedeutet, dass je zwei Karten vom Typ 2 miteinander verträglich sind.

Man betrachte nun zwei Karten  $\psi$  und  $f$  vom Typ 1. Diese Karten sind miteinander verträglich, weil die Karten auf  $X$ , die bei der Konstruktion von  $\psi$  bzw.  $f$  verwendet wurden, miteinander verträglich sind.

Sei  $\phi_1 : \bar{U}_1 \rightarrow V_1$  eine Karte vom Typ 1 und  $\phi_2 : \bar{U}_2 \rightarrow V_2$  eine vom Typ 2, sodass  $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 \neq \emptyset$ . Im Fall, dass dieser Schnitt leer ist, sind die beiden Karten ohnehin verträglich. Wir müssen nun zeigen, dass  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2) \rightarrow \phi_2(\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2)$  holomorph ist.

Sei  $\bar{r} \in \bar{U}_1 \cap \bar{U}_2$  und wähle einen Repräsentanten  $r$  von  $\bar{r}$ , sodass  $r \in U_1 \cap U_2$ , wobei  $U_1$  und  $U_2$  die offenen Mengen in  $X$  seien, die bei der Konstruktion der Karten  $\phi_1$  und  $\phi_2$  verwendet wurden. Falls  $U_1$  und  $U_2$  disjunkt sind, wähle ein  $g \in G$ , sodass  $gU_1 \cap U_2 \neq \emptyset$  und ersetze  $U_1$  durch  $gU_1$ . Ein solches  $g$  existiert, da  $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 \neq \emptyset$ . Das Ersetzen von  $U_1$  durch  $gU_1$  ändert nichts an  $\bar{U}_1$ , da  $\pi(gU_1) = \pi(U_1) = \bar{U}_1$  für jedes  $g \in G$ . Per Definition von  $\phi_1$  und  $\phi_2$  können wir schreiben:  $\phi_1 = \varphi \circ \pi|_{U_1}$  und  $\phi_2 = \bar{h} \circ \alpha^{-1}$  wobei  $\varphi$  eine Karte auf  $U_1$  sei und  $\bar{h}$  und  $\alpha$  wie in Fall 2 konstruiert wurden. Zudem ist, wie in Fall 2 konstruiert,  $\bar{h}$  auf  $U_2$  holomorph. Sei nun  $q \in \phi_1(\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2)$ .

$$\begin{aligned} \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(q) &= \bar{h} \circ \alpha^{-1} \circ \pi|_{U_1} \circ \varphi^{-1}(q) \\ &= \bar{h} \circ \alpha^{-1}(G\varphi^{-1}(q)) \\ &= \bar{h}(G_p\varphi^{-1}(q)) = h(\varphi^{-1}(q)) = (h \circ \varphi^{-1})(q) \end{aligned}$$

Da  $\varphi$  eine Karte auf  $X$  und  $h$  eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge von  $X$  ist, ist per Definition  $h \circ \varphi^{-1}$  holomorph in  $q$ . Da  $q$  beliebig gewählt wurde, ist  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$  auf  $\phi_1(\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2)$  holomorph. Dies heißt, dass  $X/G$  zusammen mit den Karten, die wir in den Fällen 1 und 2 definiert haben, eine Riemannsche Fläche ist. Es folgt sofort aus den Definitionen der Karten, dass  $\pi$  holomorph auf  $X/G$  ist. Nun berechnen wir die Multiplizität von  $\pi$  an jedem Punkt  $p \in X$ . Für  $p \in X/G$  wähle man eine Karte  $\phi : W \rightarrow V$ ,  $p \in W$ , wie in Fall 2 beschrieben. Man bemerke hierbei, dass die Konstruktionsweise von Fall 2 auch für den Fall, dass der Stabilisator von  $p$  trivial ist, anwendbar ist. Dann gilt  $\phi \circ \pi(q) = h(q)$  für jedes  $q \in W$  und somit  $\text{mult}_p(\pi) = \text{mult}_p(h)$ . Da  $\text{mult}_p(h) = |G_p|$ , folgt  $\text{mult}_p(\pi) = |G_p|$ .

Die Kompaktheit von  $X/G$  im Fall, dass  $X$  kompakt ist, ergibt sich daraus, dass das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung kompakt ist,  $\pi(X) = X/G$  und  $\pi$  stetig ist.  $\square$

**Korollar 3.9.** *Falls wir in Satz 3.1 zusätzlich fordern, dass  $G$  endlich und  $X$  kompakt ist, dann gilt  $\deg(\pi) = |G|$ .*

*Beweis.* Sei  $Gx \in X/G$  und  $p, q \in \pi^{-1}(Gx)$ , dann gilt  $Gp = Gx = Gq$ . Daraus folgt, dass  $G_q = gG_p g^{-1}$  für ein  $g \in G$ . Nach Bemerkung 2.15 gilt nun, dass  $|G_q| = |G_p|$  für alle  $p, q \in \pi^{-1}(Gx)$  gilt. Daher folgt, dass

$$\deg_{Gx}(\pi) \stackrel{\text{Satz 3.1}}{=} \sum_{p \in \pi^{-1}(Gx)} |G_p| = |\pi^{-1}(Gx)||G_x| = |Gx||G_x| = |G|.$$

Die Gültigkeit der letzten Gleichung haben wir bereits in Bemerkung 2.15 festgehalten. Aus der Kompaktheit von  $X$  folgt letztlich  $\deg(\pi) = |G|$ .  $\square$

## 4 Motivation

Wir wissen bereits, dass die topologische Struktur einer kompakten Riemannschen Fläche eindeutig durch ihr Geschlecht charakterisiert ist. Beim Studium kompakter Riemannscher Flächen interessiert uns hingegen nicht nur ihre topologische, sondern auch ihre komplexe Struktur und diese ist keineswegs eindeutig durch ihr Geschlecht determiniert. Um kompakte Riemannsche Flächen zu analysieren, betrachten wir deshalb nicht nur ihr Geschlecht, sondern werfen auch einen Blick auf ihre Automorphismengruppe. Die Automorphismengruppe einer kompakten Riemannschen Fläche ist deshalb interessant, weil diese die Symmetrien auf ihr beschreiben. Ein erster Schritt bei der Untersuchung einer solchen Automorphismengruppe ist, ihre Größe zu bestimmen. Man betrachte exemplarisch die Riemannsche Zahlensphäre  $\hat{\mathbb{C}}$ . Aus Funktionentheorie ist bekannt, dass die Automorphismengruppe von  $\hat{\mathbb{C}}$  unendlich viele Elemente besitzt - genauer gesagt gilt

$$\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ \phi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}.$$

Trotz des Umstands, dass  $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  unendlich viele Elemente besitzt, ist sie noch übersichtlich, aber wie sieht es mit kompakten Riemannschen Flächen  $X$  höheren Geschlechts aus? In diesem Fall schafft Hurwitz Abhilfe, denn er hat den folgenden Satz bewiesen:

$$\text{Sei } X \text{ von Geschlecht } g \geq 2, \text{ dann ist } |\text{Aut}(X)| \leq 84(g-1).$$

Im Buch [Lam09] von Klaus Lamotke kann man nachlesen, dass die Automorphismengruppe einer kompakten Riemannschen Fläche  $X$  von Geschlecht  $g \geq 2$  endlich ist. Rick Miranda beweist in seinem Werk [Mir95], dass für endliche Gruppen  $G$ , die effektiv und holomorph auf  $X$  wirken, gilt, dass  $|G| \leq 84(g-1)$ . Diese beiden Aussagen zusammen beweisen den Satz von Hurwitz.

Wie angekündigt, werden wir im nächsten und zugleich letzten Kapitel dieser Arbeit eine Hurwitz-Kurve studieren, nämlich die Kleinsche Kurve. Bei der Konstruktion werden wir den Satz 3.1 anwenden.

## 5 Kleinsche Kurve

Um die Kleinsche Kurve zu definieren und ihre Automorphismengruppe zu studieren, müssen wir etwas Vorarbeit leisten. Man betrachte den folgenden Epimorphismus

$$\Phi : SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left( z \mapsto \frac{az + bz}{cz + dz} \right).$$

Offenbar gilt  $\text{Ker}(\Phi) = \{E, -E\}$ , wobei  $E$  die Einheitsmatrix sei. Folglich ist nach dem Homomorphiesatz  $SL_2(\mathbb{R})/\{E, -E\} \cong \text{Aut}(\mathbb{H})$ . Wir definieren nun die projektive lineare Gruppe als  $PSL_2(\mathbb{R}) := SL_2(\mathbb{R})/\{E, -E\}$ . Auf  $SL_2(\mathbb{R})$  betrachten wir dieselbe Topologie, wie wir sie in Beispiel 2.11 eingeführt haben, und  $PSL_2(\mathbb{R})$  versehen wir mit der Quotiententopologie  $\mathcal{T}$  und definieren die folgende Operation:

$$[A] \cdot [B] = [A \cdot B] \text{ für } A, B \in SL_2(\mathbb{R}), [A] = \pi(A), [B] = \pi(B),$$

wobei  $\pi : SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$  die kanonische Projektion ist.  $(PSL_2(\mathbb{R}), \cdot, \mathcal{T})$  ist eine topologische Gruppe und wirkt auf  $\mathbb{H}$  wie folgt:

$$[A](z) = \frac{az + bz}{cz + dz}$$

wobei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}), z \in \mathbb{H}$ . Diese Gruppenwirkung ist wohldefiniert, weil  $[A] = \{A, -A\}$  und  $A(z) = -A(z)$ . Es ist zudem offensichtlich, dass diese Gruppenwirkung effektiv und holomorph ist. Für die Konstruktion der Kleinschen Kurve sind insbesondere die Untergruppen der Form

$$\Gamma_p := \{[A] \in PSL_2(\mathbb{R}) \mid A \in SL_2(\mathbb{Z}), A = E \vee A = -E \text{ mod } p\}, p \text{ Primzahl,}$$

von Interesse. Wir definieren

$$\psi : PSL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \mapsto \left[ \begin{pmatrix} [a] & [b] \\ [c] & [d] \end{pmatrix} \right],$$

wobei natürlich  $PSL_2(\mathbb{Z}) := SL_2(\mathbb{Z})/\{E, -E\}$ . Offenkundig ist  $\psi$  ein Gruppenhomomorphismus mit  $\text{Ker}(\psi) = \Gamma_p$ . Dementsprechend ist  $\Gamma_p$  ein Normalteiler von  $PSL_2(\mathbb{Z})$ .  $\psi$  ist auch surjektiv, weswegen nach dem Homomorphiesatz  $PSL_2(\mathbb{Z})/\Gamma_p \cong PSL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  gilt.

### 5.1 Die Riemannschen Flächen $X_p$ und $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$

Wir werden Mithilfe der folgenden Sätze beweisen, dass  $PSL_2(\mathbb{Z})$  eigentlich diskontinuierlich auf  $\mathbb{H}$  wirkt. Dann folgt, dass  $\Gamma_p$  für jede Primzahl  $p$  eine eigentlich diskontinuierliche Gruppenwirkung auf  $\mathbb{H}$  ist, da  $\Gamma_p$  eine Untergruppe von  $PSL_2(\mathbb{Z})$  ist. Daraus folgt nach Satz 3.1, da  $PSL_2(\mathbb{Z})$  und  $\Gamma_p$  effektiv und holomorph auf  $\mathbb{H}$  wirken, dass  $X_p := \mathbb{H}/\Gamma_p$  und  $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$  Riemannsche Flächen sind. In diesem Abschnitt orientieren wir uns ab Lemma 5.2 an Kapitel 11.3 aus dem Werk [Lam09] von Klaus Lamotke.



**Lemma 5.1.** *Sei  $G$  eine diskrete Gruppe, die effektiv auf einen Hausdorff-Raum wirkt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i)  $G$  wirkt eigentlich diskontinuierlich auf  $X$ .
- (ii) Für jedes Kompaktum  $K \subseteq X$  ist  $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$  endlich.

*Beweis.*

(i)  $\implies$  (ii): Sei  $K \subseteq X$  kompakt. Nach Lemma 3.5(i) gibt es, da  $G$  eigentlich diskontinuierlich auf  $X$  wirkt, zu jedem  $x \in X$  eine Umgebung  $U_x$  von  $x$ , sodass  $gU_x \cap U_x = \emptyset$  für jedes  $g \notin G_x$ .  $(U_x)_{x \in X}$  ist eine offene Überdeckung von  $K$ , weswegen es endlich viele Elemente  $x_1, \dots, x_n \in X$  gibt, sodass

$$K \subseteq \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} U_{x_i} =: U.$$

Nach der Wahl der  $U_x$  gilt  $gU \cap U = \emptyset$  für jedes  $g \notin \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} G_{x_i} := \tilde{G}$ . Nach Lemma 3.4 ist  $G_x$  für jedes  $x \in X$  endlich und somit sind insbesondere die  $G_{x_i}$  endlich. Es folgt, sowohl  $\{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\} \subseteq \tilde{G}$  als auch, dass  $\tilde{G}$  als endliche Vereinigung endlicher Mengen endlich ist, weshalb  $\{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\}$  endlich ist. Aus  $K \subseteq U$  folgt letztlich, dass  $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$  endlich ist.

(ii)  $\implies$  (i): Seien  $x$  und  $y$  in  $X$ , dann besitzen  $x$  und  $y$  kompakte Umgebungen  $U_x$  und  $U_y$ . Demnach ist  $U := U_x \cup U_y$  als endliche Vereinigung kompakter Mengen kompakt. Nach Voraussetzung gilt dann, dass  $\{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\}$  endlich ist. Da  $U_x \subseteq U$  und  $U_y \subseteq U$ , folgt, dass  $gU_x \cap U_y \neq \emptyset$  nur für endlich viele  $g \in G$  gilt.

□

**Lemma 5.2.** *(vgl. [Lam09], S.221) Für jedes Kompaktum  $K \subseteq \mathbb{H}$  ist die Menge*

$$M := \{A \in SL_2(\mathbb{R}) \mid A(K) \cap K \neq \emptyset\}$$

*beschränkt im Zahlenraum  $\mathbb{R}^4$  der Tupel  $(a, b, c, d)$ .*

*Beweis.* Es lässt sich leicht nachrechnen, dass  $\text{Im}(Az) = |cz + d|^{-2} \text{Im}(z)$ , für  $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$  und  $z \in \mathbb{H}$  gilt (siehe z.B. S.310 vom Buch [FreiBus06] von Freitag und Busam), denn: Allgemein gilt für komplexe Zahlen  $\text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ ,  $\overline{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$  und  $z\bar{z} = |z|^2$ .

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im} \left( \frac{az + b}{cz + d} \right) &= \frac{1}{2i} \left( \frac{az + b}{cz + d} - \overline{\left( \frac{az + b}{cz + d} \right)} \right) \\
 &= \frac{1}{2i} \left( \frac{az + b}{cz + d} - \frac{\overline{az + b}}{\overline{cz + d}} \right) \\
 &= \frac{1}{2i} \left( \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \right), \text{ denn } a, b, c, d \in \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{2i} \left( \frac{(c\bar{z} + d)(az + b) - (cz + d)(a\bar{z} + b)}{|cz + d|^2} \right)
 \end{aligned}$$

Wenn man den letzten Ausdruck ausmultipliziert, hat man:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im} \left( \frac{az + b}{cz + d} \right) &= \frac{1}{2i} \left( \frac{(ad - bc)z - (ad - bc)\bar{z}}{|cz + d|^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2i} \left( \frac{z - \bar{z}}{|cz + d|^2} \right) = \frac{1}{2i} \frac{2i \operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2} = \operatorname{Im}(z) |cz + d|^{-2}
 \end{aligned}$$

Man bedenke bei der vorletzten Gleichung, dass  $ad - bc = 1$ , da  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ . Nach dieser kleinen Hilfsrechnung können wir uns dem eigentlichen Beweis widmen. Sei  $K \subseteq \mathbb{H}$  kompakt. Da  $K$  kompakt und Elemente in  $K$  einen positiven Imaginärteil haben, gibt es ein  $r > 0$ , sodass

$$r^{-1} \leq \operatorname{Im}(z) \leq r \text{ und } |z| \leq r \text{ für jedes } z \in K. (\star)$$

Sei  $z := x + iy \in K$  und  $Az \in K$ , wobei  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  wie oben definiert sei. Mit den Abschätzungen  $(\star)$  und der Formel  $\operatorname{Im}(Az) = |cz + d|^{-2} \operatorname{Im}(z)$  folgt:

$$|cz + d|^2 \leq r^2 \text{ und } |az + d| = |cz + d| |Az| \leq r^2.$$

Wir haben  $r^2 \geq |cz + d|^2 = (cx + d)^2 + c^2y^2 \geq c^2y^2$ , weshalb  $|c|y \leq r$ . Man bedenke hierbei, dass  $y > 0$ , da  $z \in K \subseteq \mathbb{H}$  und somit  $y = \operatorname{Im}(z) > 0$ . Analog zeigt man die Abschätzung  $|a|y \leq r^2$ :

$$r^4 \geq |az + d|^2 = (ax + d)^2 + a^2y^2 \geq a^2y^2 \implies |a|y \leq r^2.$$

Nach  $(\star)$  ist  $y \geq r^{-1}$ , denn  $y = \operatorname{Im}(z)$  und  $z \in K$ . Daraus folgt dann:  $|c| \leq r^2$  und  $|a| \leq r^3$ . Weiterhin gilt, da  $|z| \leq r$ :

$$|d| \leq |cz + d| + |c||z| \leq r + r^3$$

$$|b| \leq |az + b| + |a||z| \leq r^2 + r^4.$$

Demnach haben wir für  $a, b, c, d$  Schranken. Dies bedeutet, dass  $M$  für jede kompakte Menge  $K \subseteq \mathbb{H}$  in  $\mathbb{R}^4$  beschränkt.  $\square$

**Definition 5.3.** Eine Untergruppe  $G \subseteq SL_2(\mathbb{R})$  heißt **diskret**, falls die Einheitsmatrix  $E$  isoliert in  $G$  liegt. Das heißt, dass es eine Umgebung  $U$  von  $E$  in  $SL_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^4$  gibt, sodass  $U \cap G = \{E\}$ .

**Bemerkung 5.4.** An dieser Stelle sei erwähnt, dass wir unsere Definition einer diskreten Gruppe (Definition 2.10) nur umformuliert haben. Die obige Definition einer diskreten Gruppe  $G$  in  $SL_2(\mathbb{R})$  bedeutet nichts anderes, als dass der topologische Raum  $(G, \mathcal{T})$ , wobei  $\mathcal{T} := \{U \cap G \mid U \text{ ist offen in } SL_2(\mathbb{R})\}$ , diskret ist. Auf diese Weise stimmen die beiden Definitionen einer diskreten Gruppe miteinander überein. Für die weiteren Beweise eignet es sich eher, mit Definition 5.3 zu arbeiten.

**Definition 5.5.** Eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ ,  $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$  **konvergiert** gegen ein Element  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ , falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d$ . Wir schreiben dann:  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ .

**Bemerkung 5.6.** Da  $A_n^{-1} = \frac{1}{a_n d_n - b_n c_n} \begin{pmatrix} d_n & -b_n \\ -c_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_n & -b_n \\ -c_n & a_n \end{pmatrix}$  und  $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ , gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{-1} = A^{-1}$ .

**Definition 5.7.** Eine Teilmenge  $A$  eines topologischen Raums  $X$  heißt **lokal endlich**, falls  $K \cap A$  für jedes Kompaktum  $K \subseteq X$  endlich ist.

**Lemma 5.8.** (vgl. [Lam09], S.221) Sei  $G$  eine diskrete Untergruppe von  $SL_2(\mathbb{R})$ . Dann ist  $G$  lokal endlich.

*Beweis.* Wir führen diesen Beweis per Widerspruch und fassen  $G$  als eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^4$  auf. Angenommen, es gibt eine kompakte Teilmenge  $K \subseteq \mathbb{R}^4$ , sodass  $K \cap G$  unendlich viele Elemente besitzt. Dann gibt es wegen der Kompaktheit von  $K$  eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K \cap G$  mit paarweise verschiedenen Folgengliedern, die in  $K$  konvergiert. Es folgt nun, dass die Folge  $(A_n A_{2n}^{-1})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq G \setminus \{E\}$  gegen  $E$  konvergiert. Dass die Folgenglieder der Folge  $(A_n A_{2n}^{-1})_n$  nicht gleich  $E$  sind, liegt daran, dass die Folgenglieder von  $(A_n)_n$  paarweise verschieden sind. Da  $(A_n A_{2n}^{-1})_n$  gegen  $E$  konvergiert, enthält jede Umgebung  $U$  von  $E$  mindestens ein Folgenglied von  $(A_n A_{2n}^{-1})_n$ , was bedeutet, dass  $U \cap G \neq \{E\}$  für jede Umgebung  $U$  von  $E$  gilt, was der Diskretheit von  $G$  widerspricht.  $\square$

**Satz 5.9.** Für eine Untergruppe  $G \subseteq SL_2(\mathbb{R})$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $G$  wirkt eigentlich diskontinuierlich auf  $\mathbb{H}$ .
- (ii) Es gibt mindestens zwei verschiedene Punkte  $\alpha$  und  $\beta$  in  $\mathbb{H}$ , die auf lokal endlichen  $G$ -Bahnen liegen.
- (iii)  $G$  ist diskret in  $SL_2(\mathbb{R})$ .

*Beweis.*

(i)  $\implies$  (ii):

Sei  $x \in X$  und  $K \subseteq X$  kompakt. Falls  $Gx \cap K = \emptyset$  gibt es nichts zu zeigen. Sei also  $y \in Gx \cap K$ . Nach Lemma 5.1 ist  $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$  endlich und somit ist  $Gy \cap K$  endlich, denn  $y \in K$ , weswegen  $\{g \in G \mid \{gy\} \cap K \neq \emptyset\}$  endlich ist. Es gilt allerdings  $Gx = Gy$ , weshalb auch  $Gx \cap K$  endlich ist. Anders gesagt: Alle  $G$ -Bahnen sind lokal endlich.

(ii)  $\implies$  (iii):

Angenommen,  $G$  ist nicht diskret, dann gibt es eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq G \setminus \{E\}$ , sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = E$ . Seien  $\alpha$  und  $\beta$  Elemente aus  $\mathbb{H}$ , die auf lokal endlichen  $G$ -Bahnen liegen. Dann besitzen  $\alpha$  und  $\beta$  kompakte Umgebungen  $U_\alpha$  bzw.  $U_\beta$ , sodass  $U_\alpha \cap G\alpha = \{\alpha\}$  und  $U_\beta \cap G\beta = \{\beta\}$ . ( $\star$ )

Da  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen die Einheitsmatrix konvergiert, gibt es ein  $n_0$  und  $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $A_n(\alpha) \in U_\alpha$  für alle  $n \geq n_0$  und  $A_n(\beta) \in U_\beta$  für alle  $n \geq \tilde{n}_0$ . Aus ( $\star$ ) folgt, dass  $A_n(\alpha) = \alpha$  und  $A_n(\beta) = \beta$  für alle  $n \geq \max\{n_0, \tilde{n}_0\}$ . Jeder Automorphismus von  $\mathbb{H}$  mit mindestens zwei Fixpunkten ist die Identität. Daraus ergibt sich, dass  $A_n = -E$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, denn  $A_n = E$  kommt nach der Definition von  $(A_n)_n$  nicht infrage. Somit gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = -E$ , was ein Widerspruch ist.

(iii)  $\implies$  (i):

Sei  $K \subseteq \mathbb{H}$  kompakt. Nach Lemma 5.2 ist  $M := \{A \in G \mid A(K) \cap K \neq \emptyset\}$  beschränkt. Angenommen,  $M$  ist nicht endlich. Dann gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine Folge mit unendlich vielen verschiedenen Folgengliedern  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq G$ , die gegen ein  $A \in SL_2(\mathbb{R})$  konvergiert. Betrachte nun die Menge  $D := \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{A\}$ .  $D$  ist offensichtlich abgeschlossen.  $D$  ist zudem beschränkt, weil  $M$  beschränkt ist. Nach dem Satz von Heine-Borel ist  $D$  kompakt. Daher gilt, da nach Lemma 5.8 diskrete Gruppen lokal endlich sind, dass  $D \cap G$  endlich ist. Dies ist allerdings ein Widerspruch, da  $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  nicht endlich ist und  $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq D \cap G$  gilt. Aus Lemma 5.1 folgt, dass  $G$  eigentlich diskontinuierlich auf  $X$  wirkt. □

**Satz 5.10.** *Eine Untergruppe  $G \subseteq SL_2(\mathbb{R})$  wirkt genau dann eigentlich diskontinuierlich auf  $\mathbb{H}$ , wenn  $\pi(G)$  diskontinuierlich auf  $\mathbb{H}$  wirkt.  $\pi : SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$  sei hierbei die kanonische Projektion.*

*Beweis.* Diese Aussage folgt sofort aus dem Umstand, dass  $A(z) = [A](z)$ , wobei  $A \in SL_2(\mathbb{R})$ ,  $\pi(A) = [A]$  und  $z \in \mathbb{H}$ . □

Mit dem oben gezeigten folgt nun leicht, dass  $X_p$  eine Riemannsche Fläche ist: Aus der Diskretheit von  $\mathbb{Z}$  folgt mithilfe der Definitionen 5.3 und 5.5 sofort, dass  $SL_2(\mathbb{Z})$  diskret ist. Nach Satz 5.9 gilt nun, dass  $SL_2(\mathbb{Z})$  eigentlich diskontinuierlich auf  $\mathbb{H}$  wirkt. Daher wirkt nach Satz 5.10  $PSL_2(\mathbb{Z}) = \pi(SL_2(\mathbb{Z}))$  eigentlich diskontinuierlich auf  $\mathbb{H}$ . Selbiges gilt für  $\Gamma_p$ , weil  $\Gamma_p$  Untergruppe von  $PSL_2(\mathbb{Z})$

ist. Aus Satz 3.1 folgt schlussendlich, dass sowohl  $X_p$  als auch  $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$  Riemannsche Flächen sind.

## 5.2 Nichttriviale Stabilisatoren in $PSL_2(\mathbb{Z})$ und Fundamentalgebiete

Grundlegendes Ziel dieses Kapitels ist es, wie in der Einleitung bereits erwähnt, eine kompakte Riemannsche Fläche  $\bar{X}_p$  zu konstruieren, sodass  $X_p \subseteq \bar{X}_p$ . Bei der Konstruktion von  $\bar{X}_p$  ist es wichtig, die Gruppe  $PSL_2(\mathbb{Z})$  zu verstehen. Deshalb werden wir in diesem Abschnitt beweisen, dass die einzigen Elemente in  $\mathbb{H}$ , die von einem nichttrivialen Element aus  $PSL_2(\mathbb{Z})$  fixiert werden, die Elemente aus  $PSL_2(\mathbb{Z})i$  und  $PSL_2(\mathbb{Z})\varrho$  sind, wobei  $\varrho := e^{\frac{i\pi}{3}}$ .

Wir werden in diesem Abschnitt zudem ein Fundamentalgebiet für die Gruppenwirkung von  $PSL_2(\mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{H}$  angeben und begründen, dass  $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$  homöomorph zu  $\mathbb{C}$  ist.

Die Vorlage für die Bestimmung der nichttrivialen Stabilisatoren der Gruppenwirkung  $SL_2(\mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{H}$  liefert das Buch [FreiBus06], Kapitel VI.1, von Freitag und Busam. Beim Beweis des letzten Satzes dieses Abschnitts haben wir uns teilweise an Theorem 4 von Kapitel 6 aus [Don11] orientiert.

**Lemma 5.11.** (vgl. [FreiBus06], S.328) Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ , sodass  $A\varrho = \varrho$ . Dann gilt:

$$A \in \left\{ \pm E, \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

*Beweis.* Man bemerke, dass  $\varrho = e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ . Es gilt:

$$\varrho^2 = \frac{1}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{4} = \frac{-1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} = -\bar{\varrho} = \varrho - 1 \text{ und } \varrho^3 = -1.$$

Aus der Gleichung

$$A\varrho = \varrho \Leftrightarrow z = \frac{a\varrho + b}{c\varrho + d} \Leftrightarrow a\varrho + b = c\varrho^2 + d \Leftrightarrow a\varrho + b = c(\varrho - 1) + d\varrho = c\varrho - c + d\varrho$$

folgt, wenn man  $\varrho^2 = -\bar{\varrho} = \varrho - 1$  einsetzt, dass  $a = c + d$  und  $b = -c$ , also

$$A = \begin{pmatrix} d - b & b \\ -b & d \end{pmatrix},$$

woraus sich, da  $\det(A) = 1$ ,

$$b^2 - bd + d^2 = 1 \quad (\star)$$

ergibt. Falls  $d = b$ , sind die einzigen Lösungen der Gleichung  $(\star)$   $d = b = 1$  und  $d = b = -1$ . Sofern  $d, b < 0$ , ist die Gleichung  $(\star)$  nicht lösbar, da in diesem Fall  $b^2 - bd + d^2 \geq 3$ . Für den Fall  $d, b > 1$  gilt  $b^2 - bd + d^2 = (b - d)^2 + db \geq 4$ , weshalb auch in diesem Fall die Gleichung  $(\star)$  keine Lösung hat. Offensichtlich erfüllen  $(d, b) \in \{\pm(0, 1), \pm(1, 0)\}$  die Gleichung  $(\star)$ . Insgesamt haben wir für  $(d, b)$  als Lösungen:  $\{\pm(0, 1), \pm(1, 0), \pm(1, 1)\}$ .  $\square$

Damit haben wir gezeigt, dass  $\varrho$  einen nichttrivialen Stabilisator in  $PSL_2(\mathbb{Z})$  hat und, dass  $|PSL_2(\mathbb{Z})_y| = 3$  für jedes  $y \in PSL_2(\mathbb{Z})\varrho$  gilt.

**Korollar 5.12.** *Die Gleichungen  $A\varrho = \varrho^2$ ,  $A\varrho^2 = \varrho$  und  $A\varrho^2 = \varrho^2$  haben in  $SL_2(\mathbb{Z})$  jeweils sechs Lösungen, nämlich:*

$$(i) (A\varrho = \varrho^2): \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ii) (A\varrho^2 = \varrho): \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(iii) (A\varrho^2 = \varrho^2): \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Beweis.* Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(\varrho) = \frac{-1}{\varrho} = \frac{-1}{\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}} = \frac{\frac{-1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{-1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} = \varrho^2$$

$\square$

Bevor wir zeigen, dass neben den Elementen aus  $PSL_2(\mathbb{Z})\varrho$  nur die Elemente aus  $PSL_2(\mathbb{Z})i$  nichttriviale Stabilisatoren in  $PSL_2(\mathbb{Z})$  besitzen, diskutieren wir kurz den Begriff eines Fundamentalgebiets für eine Gruppenwirkung.

**Definition 5.13.** *Sei  $G$  eine Gruppe, die auf einen topologischen Raum  $X$  wirkt. Wir nennen eine offene Menge  $\Omega \subseteq X$  ein **Fundamentalgebiet** für diese Gruppenwirkung, falls für jedes  $x \in X$  gilt:  $Gx \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$  und  $|Gx \cap \Omega| \leq 1$ .*

**Beispiel 5.14.** *Sei  $\{\omega_1, \omega_2\}$  eine  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\mathbb{C}$  und  $\Lambda := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  ein Gitter.  $\Lambda$  wirke wie folgt auf  $\mathbb{C}$ :  $\lambda \bullet z := \lambda + z$ , für  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Dann ist*

$$P := \{a\omega_1 + b\omega_2 \mid a, b \in (0, 1)\}$$

*ein Fundamentalgebiet für diese Gruppenwirkung.*

Wir betrachten nun die Menge  $\Omega := \{z \in \mathbb{H} \mid |Re(z)| < \frac{1}{2}, |z| > 1\}$ . Dies ist ein Fundamentalgebiet für die Gruppenwirkung von  $SL_2(\mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{H}$ . Dieses Resultat werden wir erst später beweisen. Davor werden wir alle Elemente  $A$  aus  $SL_2(\mathbb{Z})$  bestimmen, für die  $A\overline{\Omega} \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$  gilt. Da  $\Omega$  ein Fundamentalgebiet ist, beschreibt die Ungleichung  $A\overline{\Omega} \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$  alle möglichen nichttrivialen Stabilisatoren in  $SL_2(\mathbb{Z})$  eines Elements in  $\mathbb{H}$ .

**Lemma 5.15.** Sei  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ , sodass  $A\bar{\Omega} \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$ , dann ist  $A$  eine der folgenden Matrizen:

$$\pm E, \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

oder eine der Matrizen aus Korollar 5.12.

*Beweis.* Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$  und  $z \in \bar{\Omega}$ .

Für den Fall  $c = 0$  impliziert  $\det(A) = 1$ , dass  $A \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ .

Da  $b \in \mathbb{Z}$  beliebig ist, können wir ohne Einschränkung den Beweis weiter mit  $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  führen. Sofern  $A(z) \in \bar{\Omega}$ , gilt

$$\frac{1}{2} \geq |\operatorname{Re}(A(z))| = |\operatorname{Re}(z + b)| = |\operatorname{Re}(z) + b|.$$

Für  $z$  gilt allerdings  $|\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}$ , weshalb die obige Ungleichung nur für  $b \in \{0, \pm 1\}$  in  $\mathbb{Z}$  lösbar ist.

Sei nun  $c \neq 0$ . Für alle  $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\}$  gilt  $|cz + d| \geq 1$ , denn

$$\begin{aligned} |cz + d| &= \sqrt{(c\operatorname{Re}(z) + d)^2 + (c\operatorname{Im}(z))^2} \\ &= \sqrt{c^2((\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2) + 2cd\operatorname{Re}(z) + d^2} \\ &= \sqrt{c^2|z|^2 + 2cd\operatorname{Re}(z) + d^2} \underset{|z| \geq 1}{\geq} \sqrt{c^2 + 2cd\operatorname{Re}(z) + d^2}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck  $\sqrt{c^2 + 2cd\operatorname{Re}(z) + d^2}$  ist genau dann größer oder gleich 1, wenn  $c^2 + 2cd\operatorname{Re}(z) + d^2 \geq 1$ , weil  $c^2 + 2cd\operatorname{Re}(z) + d^2 \geq 0$ , denn  $|\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}$ .

Falls  $\operatorname{Re}(z) < 0$ , ist  $c^2 + 2cd\operatorname{Re}(z) + d^2$  minimal, wenn  $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$  und dann haben wir  $c^2 + 2cd\operatorname{Re}(z) + d^2 \geq c^2 - cd + d^2 = (c - d)^2 + \frac{3}{2}dc$ .

Falls  $d = 0$ , gilt  $(c - d)^2 + \frac{3}{2}dc = c^2 \geq 1$ , denn  $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Sofern  $d \neq 0$ , müssen wir noch zwischen dem Fall  $dc > 0$  und  $dc < 0$  unterscheiden. Falls  $dc > 0$ :  $(c - d)^2 + \frac{3}{2}dc \geq 1$ .

Falls  $dc < 0$ :  $(c - d)^2 + \frac{3}{2}dc \geq (c - d)^2 + 2dc = c^2 + d^2 \geq 1$ , denn  $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Zusammengefasst gilt, dass  $|cz + d| \geq 1$ , falls  $\operatorname{Re}(z) < 0$ .

Falls  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ , dann ist  $c^2 + 2cd\operatorname{Re}(z) + d^2$  minimal, wenn  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$  und es

gilt dann  $c^2 + 2cd\operatorname{Re}(z) + d^2 \geq c^2 + cd + d^2 = (c + d)^2 - \frac{3}{2}dc$ .

Ähnliche Überlegungen wie oben führen, auch wenn  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ , zu der Abschätzung  $|cz + d| \geq 1$ .

Man kann nachrechnen, dass sich  $A$  zerlegen lässt als

$$A(z) = \frac{a}{c} - \frac{c^{-2}}{z + \frac{d}{c}}.$$

Falls  $A(z) \in \bar{\Omega}$ , dann haben wir  $1 \leq |-cA(z) + a|$  und es folgt so:

$$|-cA(z) + a| = \left| \frac{1}{cz + d} \right| \Leftrightarrow |cz + d| \leq 1.$$

Zusammen ergibt sich  $|cz + d| = 1$ , sofern sowohl  $z$  als auch  $Az$  in  $\bar{\Omega}$  liegen.

Sei  $z \in \bar{\Omega}$ . Es gilt sowohl  $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} \geq 1$  als auch  $|\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}$ .

Daraus ergibt sich für  $\operatorname{Im}(z)$  die folgende Abschätzung:

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + (\operatorname{Im}(z))^2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + (\operatorname{Im}(z))^2 \geq 1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Die Gleichung  $|cz + d| = 1$  und die Ungleichung  $\operatorname{Im}(z) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  implizieren zusammen, dass  $c, d \in \{0, \pm 1\}$ , falls  $A(z) \in \bar{\Omega}$ . Es gilt  $A\bar{\Omega} \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$  genau dann, wenn  $A^{-1}\bar{\Omega} \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$ , weswegen wir die vorherige Analyse mit  $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$  durchführen können. Am Ende ergibt sich, dass auch  $a \in \{0, \pm 1\}$  gelten muss. Schreibt man alle Matrizen in  $SL_2(\mathbb{Z})$ , die nur die Einträge 0 und  $\pm 1$  haben, erhält man genau die im Satz aufgeführte Liste an Matrizen.  $\square$

Aus dieser Liste kann man nun ablesen, dass nur Elemente aus  $PSL_2(\mathbb{Z})\rho$  und  $PSL_2(\mathbb{Z})i$  nichttriviale Stabilisatoren in  $PSL_2(\mathbb{Z})$  besitzen. Ein nichttrivialer Stabilisator von  $i$  ist  $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Man rechnet kurz nach, dass  $A^2 = E$ . Somit gilt  $|PSL_2(\mathbb{Z})_x| = 2$  für jedes  $x \in PSL_2(\mathbb{Z})i$ . Jetzt müssen wir noch den Beweis nachreichen, dass  $\Omega$  ein Fundamentalgebiet für die Gruppenwirkung von  $PSL_2(\mathbb{H})$  auf  $\mathbb{H}$  ist.

**Satz 5.16.**  $\Omega = \{z \in \mathbb{H} \mid |\operatorname{Re}(z)| < \frac{1}{2}, |z| > 1\}$  ist ein Fundamentalgebiet für die Gruppenwirkung von  $SL_2(\mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{H}$ .

*Beweis.* Wir müssen zum einen zeigen, dass  $SL_2(\mathbb{Z})x \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$  für jedes  $x \in \mathbb{H}$  gilt und zum anderen, dass  $|SL_2(\mathbb{Z})x \cap \Omega| \leq 1$ . Letzteres ergibt sich schnell aus Lemma 5.15:

Man kann leicht nachrechnen, dass für  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  mit  $A\bar{\Omega} \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$ , gilt, dass  $A\bar{\Omega}$  in  $\bar{\Omega} \setminus \Omega$  liegt. Dies bedeutet, dass  $A\Omega \cap \Omega = \emptyset$  für jedes  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  gilt, denn:

Wir nehmen nun an, dass  $y := gx \in SL_2(\mathbb{Z})x \cap \Omega$  für ein  $x \in \mathbb{H}$ , dann ist  $SL_2(\mathbb{Z})y = SL_2(\mathbb{Z})x$  und somit  $SL_2(\mathbb{Z})y \cap \Omega \neq \emptyset$ , aber

$$SL_2(\mathbb{Z})y \cap \Omega \subseteq \bigcup_{g \in SL_2(\mathbb{Z})} g(\Omega) \cap \Omega = \emptyset,$$



weswegen  $|SL_2(\mathbb{Z})x \cap \Omega| = 0$  für jedes  $x \in \mathbb{H}$  gilt.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass  $SL_2(\mathbb{Z})x \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$  für jedes  $x \in \mathbb{H}$  gilt.

Sei  $x \in \mathbb{H}$ . Wir haben im Beweis von Lemma 5.2 für  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  bereits folgendes nachgerechnet:

$$\operatorname{Im}(Az) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}$$

wobei  $(c, d)$  die zweite Zeile von  $A$  sei. Sei nun  $((c_n, d_n))_n$  die Folge aller Paare in  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , die als zweite Zeile einer Matrix in  $SL_2(\mathbb{Z})$  auftauchen, wobei kein Paar mehrfach auftreten soll. Da  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$  für jedes  $d \in \mathbb{Z}$  und  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$  für jedes  $c \in \mathbb{Z}$  in  $SL_2(\mathbb{Z})$  liegen, sind die beiden Komponenten  $(c_n)_n$  und  $(d_n)_n$  in der Folge  $((c_n, d_n))_n$  unbeschränkt. Daher gilt

$$|c_n x + d_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Dies bedeutet aber, dass es zu  $\tilde{n} \in \mathbb{N}$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $|c_{\tilde{n}} x + d_{\tilde{n}}| \leq |c_n x + d_n|$  für jedes  $n \geq n_0$ . Wir setzen nun

$$|c_0 x + d_0| := \min(\{|c_n x + d_n| \mid n \in \{1, \dots, n_0\}\} \cup \{|c_{\tilde{n}} x + d_{\tilde{n}}|\})$$

Nun gibt es nach Definition unserer Folge  $((c_n, d_n))_n$  eine Matrix  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ , sodass  $(c_0, d_0)$  die zweite Zeile von  $A$  ist. Sei  $B \in SL_2(\mathbb{Z})$ . Dann gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $(c_n, d_n)$  die zweite Zeile von  $B$  ist. Per Definition gilt dann  $|c_0 x + d_0| \leq |c_n x + d_n|$ . Daraus folgt, dass

$$\operatorname{Im}(Ax) = \frac{\operatorname{Im}(x)}{|c_0 x + d_0|^2} \geq \frac{\operatorname{Im}(x)}{|c_n x + d_n|^2} = \operatorname{Im}(Bx).$$

Dies heißt, dass  $\operatorname{Im}(Ax) = \max_{g \in SL_2(\mathbb{Z})} \{\operatorname{Im}(gx)\}$ . Wir definieren nun  $\hat{x} := Ax$ . Wir

können annehmen, dass  $\hat{x} \in \{z \in \mathbb{H} \mid |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\}$ . Andernfalls kann man  $T$  geeignet oft auf  $\hat{x}$  anwenden, wobei  $T(z) := z + 1$ . Man bedenke hierbei, dass  $\operatorname{Im}(T(z)) = \operatorname{Im}(z)$  für jedes  $z \in \mathbb{C}$  gilt. Wir betrachten nun  $S(z) := -\frac{1}{z}$  in  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Es gilt  $\operatorname{Im}(Sz) = |z|^{-2} \operatorname{Im}(z)$  für jedes  $z \in \mathbb{H}$ . Demnach ist  $\operatorname{Im}(S(z)) > \operatorname{Im}(z)$ , falls  $|z| < 1$ . Nun ist aber  $\operatorname{Im}(\hat{x}) > \operatorname{Im}(S(\hat{x}))$ , weshalb  $|\hat{x}| \geq 1$ . Das heißt:  $A\hat{x} \in SL_2(\mathbb{Z})\hat{x} \cap \bar{\Omega}$ , woraus folgt, dass  $SL_2(\mathbb{Z})\hat{x} \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$ . Da  $x$  und  $\hat{x}$  auf demselben Orbit liegen, gilt  $SL_2(\mathbb{Z})\hat{x} = SL_2(\mathbb{Z})x$ .

So ergibt sich:  $SL_2(\mathbb{Z})x \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$ . □

Ausgehend von diesem Fundamentalgebiet  $\Omega$  kann man sich überlegen, dass  $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$  homöomorph zu  $\mathbb{C}$  ist. Nach geeigneter Verformung unseres Fundamentalgebiets sieht man schnell, dass  $\Omega$  homöomorph ist zu  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ . Die komplexe Ebene  $\mathbb{C}$  wiederum ist homöomorph zu  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ , woraus sich ergibt,

dass  $\mathbb{C}$  homöomorph ist zu  $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$ . Einen Beweis dafür, dass  $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$  homöomorph zu  $\mathbb{C}$  ist, kann man in Kapitel 6 des Buches [Don11] nachlesen.

### 5.3 Exkurs: Algebraische Topologie

Sei  $Y$  eine Riemannsche Fläche. In diesem Exkurs wollen wir beweisen, dass zu einer nicht-konstanten eigentlichen holomorphen Abbildung  $F : Y \rightarrow \mathbb{C}$  eine kompakte Riemannsche Fläche  $\tilde{Y}$  und eine holomorphe Abbildung  $\tilde{F} : \tilde{Y} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  existieren, sodass  $Y \subseteq \tilde{Y}$ ,  $\tilde{F}|_Y = F$  und  $\tilde{F}^{-1}(\infty) = \tilde{Y} \setminus Y$ . Für den Beweis dieser Aussage benötigen wir Kenntnisse aus der Überlagerungstheorie. Mit diesem Satz können wir im letzten Abschnitt dieser Bachelorarbeit beweisen, dass sich  $X_p$  kompaktifizieren lässt. Wir werden die meisten Sätze dieses Abschnitts ohne Beweis angeben. Den größten Teil dieses Abschnitts haben wir dem Buch [Mir95], Kapitel III.4, von Rick Miranda entnommen, jedoch stammen einige Bemerkungen und die ersten beiden Definitionen dieses Abschnitts aus dem Buch [Don11] von Simon Donaldson.

Sofern nicht anders angegeben sei  $V$  eine Riemannsche Fläche und  $U$  ein topologischer Raum.

**Definition 5.17.**  $F : U \rightarrow V$  heißt **lokaler Homöomorphismus**, falls jedes  $p \in U$  eine Umgebung  $W \subseteq U$  besitzt, sodass  $F|_W : W \rightarrow F(W)$  ein Homöomorphismus ist.

**Definition 5.18.** Eine stetige Abbildung  $F : U \rightarrow V$  heißt **Überlagerung** von  $V$ , falls zu jedem  $v \in V$  eine Umgebung  $W \subseteq V$  existiert, sodass  $F^{-1}(W)$  derart als disjunkte Vereinigung offener Mengen  $U_\alpha \subseteq U$  geschrieben werden kann, dass  $F|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow W$  ein Homöomorphismus ist. Falls  $U$  (einfach-)zusammenhängend ist, nennen wir  $F$  eine **(einfach-)zusammenhängende Überlagerung** von  $V$ .

**Bemerkung 5.19.**

- (1) Offenbar ist jede Überlagerung von  $V$  surjektiv.
- (2) Überlagerungen von  $V$  sind lokale Homöomorphismen.
- (3) Jede Überlagerung von  $V$  ist offen.
- (4) Die Kardinalität von  $F^{-1}(v)$  hängt nicht von  $v \in V$  ab. Wir definieren daher den **Grad**  $\deg(F)$  einer Überlagerung  $F$  von  $V$  als die Kardinalität von  $F^{-1}(v)$  für ein  $v \in V$ . Falls der Grad von  $F$  endlich ist, nennen wir  $F$  eine **endliche Überlagerung** von  $V$  und es gilt, dass  $F$  eigentlich ist.

**Beispiel 5.20.**

- (1) Seien  $X$  und  $Y$  Riemannsche Flächen.  $f : X \rightarrow Y$  sei eine eigentliche unverzweigte holomorphe Abbildung. Dann ist  $f$  eine Überlagerung von  $Y$ . Dies folgt aus dem Satz über die lokale Normalform und dass  $f^{-1}(y)$  für jedes  $y \in Y$  endlich ist. Letzteres gilt, da  $f^{-1}(y)$  diskret ist, weil  $f$  eine nicht-konstante holomorphe Abbildung ist, weswegen  $f^{-1}(y)$  als diskrete und

komakte Menge endlich ist. Die Kardinalität von  $f^{-1}(v)$  hängt nicht von  $v \in V$  ab, weil  $f$  unverzweigt ist. Der Grad von  $f$  als eigentliche holomorphe Abbildung entspricht genau dem Grad von  $f$  als Überlagerung von  $Y$ .

- (2) Sei  $f : X \rightarrow Y$  biholomorph. Dann ist  $f$  eine Überlagerung von  $Y$ .
- (3) Seien  $X$  und  $Y$  kompakte Riemannsche Flächen. Jede nicht-konstante unverzweigte holomorphe Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist eine Überlagerung von  $Y$ . Diese Behauptung folgt aus denselben Gründen wie in (a) nur gilt hier, dass  $f^{-1}(y)$  deshalb endlich ist, weil  $f^{-1}(y)$  eine diskrete Teilmenge der kompakten Menge  $X$  ist. Auch hier hängt die Kardinalität von  $f^{-1}(v)$  nicht von  $v \in V$  ab, weil  $f$  unverzweigt ist.

**Bemerkung 5.21.** Die Relation:

$F : U \rightarrow V \sim F' : U' \rightarrow V :\Leftrightarrow \exists G : U \rightarrow U'$  Homöomorphismus:  $F' \circ G = F$   
definiert auf der Menge

$$\{F : U \rightarrow V \mid U \text{ topologischer Raum, } F \text{ ist eine Überlagerung von } V\}$$

eine Äquivalenzrelation.

Wenn wir von Äquivalenzklassen von Überlagerungen von  $V$  sprechen, dann beziehen wir uns stets auf die Äquivalenzrelation, die wir in der Bemerkung 5.21 eingeführt haben.

**Definition 5.22.** Ein **Weg** in  $V$  ist eine stetige Abbildung  $\gamma : [0,1] \rightarrow V$ .  $\gamma$  ist eine **Schleife** im Punkt  $x_0$ , falls  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ . Wir sagen dann, dass  $\gamma$  eine Schleife mit **Basispunkt**  $x_0$  ist. Sei  $q \in V$ . Zwei Schleifen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  mit Basispunkt  $q$  heißen **homotop**, falls eine stetige Abbildung  $G : [0,1] \times [0,1] \rightarrow V$  existiert, sodass

- $G(0,t) = \gamma_1(t)$  für jedes  $t \in [0,1]$
- $G(1,t) = \gamma_2(t)$  für jedes  $t \in [0,1]$
- $G(s,0) = G(s,1) = q$  für jedes  $s \in [0,1]$ .

Dann nennen wir  $G$  eine **Homotopie** zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ . Die Relation

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 :\Leftrightarrow \gamma_1 \text{ und } \gamma_2 \text{ sind homotop}$$

definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Schleifen in  $V$  mit Basispunkt  $q$ . Die Äquivalenzklassen bezüglich der oben definierten Relation nennen wir **Homotopieklassen**. Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(V,q)$  von  $V$  mit Basispunkt  $q$  ist die Menge aller Homotopieklassen zusammen mit der folgenden Operation: Seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  Schleifen in  $V$  mit Basispunkt  $q$

$$\gamma_1 \otimes \gamma_2 : [0,1] \rightarrow V, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Auf  $\pi_1(V, q)$  definieren wir nun:  $[\gamma_1] \otimes [\gamma_2] = [\gamma_1 \otimes \gamma_2]$ .

Das folgende Beispiel haben wir dem Buch [Don11] von Simon Donaldson entnommen.

**Beispiel 5.23.** (vgl. [Don11], S.46)

- (a) Falls  $V$  gleich  $\mathbb{C}$  oder eine Scheibe in  $\mathbb{C}$  ist, so ist  $\pi_1(V, q)$  für jedes  $q \in V$  trivial.
- (b) Falls  $V$  gleich  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  oder eine punktierte Scheibe in  $\mathbb{C}$  ist, dann ist  $\pi_1(V, q)$  isomorph zu  $\mathbb{Z}$  für jedes  $q \in V$ .

**Bemerkung 5.24.** Jede Überlagerung  $F : U \rightarrow V$  von  $V$  besitzt die **Weg-Liftungseigenschaft**. Dies bedeutet, dass für jeden Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$  und jeden Punkt  $p \in F^{-1}(\gamma(0))$  ein Weg  $\tilde{\gamma}$  in  $U$  existiert, sodass  $\tilde{\gamma}(0) = p$  und  $F \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ .  $\tilde{\gamma}$  ist dann der **Lift** von  $\gamma$  bzgl.  $F$  mit Startpunkt  $p$ .

**Satz 5.25.** Es existiert eine universelle Überlagerung  $F_0 : U_0 \rightarrow V$  von  $V$ , sodass:

- $U_0$  ist einfach-zusammenhängend.
- Falls  $F'_0 : U'_0 \rightarrow V$  eine einfach-zusammenhängende Überlagerung von  $V$  ist, dann sind  $F_0$  und  $F'_0$  äquivalent.
- Sofern  $F : W \rightarrow V$  eine zusammenhängende Überlagerung von  $V$  ist, existiert genau eine Überlagerung  $G : U_0 \rightarrow U$  von  $U$ , sodass  $F_0 = F \circ G$ .

**Bemerkung 5.26.** Der letzte Punkt im obigen Satz beschreibt die Universalitätseigenschaft von  $F_0$ .

**Definition 5.27.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subseteq G$  eine Untergruppe von  $G$ . Wir nennen dann  $\{xHx^{-1} \mid x \in G\}$ , mit  $xHx^{-1} := \{xhx^{-1} \mid h \in H\}$ , die **Konjugationsklasse von  $H$  in  $G$** .

Fortan sei  $q \in V$  und  $F_0 : U_0 \rightarrow V$  eine universelle Überlagerung von  $V$  wie sie in Satz 5.25 beschrieben wurde.

Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(V, q)$  induziert Homöomorphismen  $g : U_0 \rightarrow U_0$ , sodass  $F_0 \circ g = F_0$ . Wir sagen dann, dass  $\pi_1(V, q)$  auf  $F_0$  wirkt. Jetzt skizzieren wir, wie  $\pi_1(V, q)$  solche Homöomorphismen induziert. Die folgenden Erläuterungen stammen aus [Mir95], S.85: Sei  $p \in F_0^{-1}(q)$ . Wähle eine Schleife  $\gamma$  in  $V$  mit Basispunkt  $q$  und ein  $u \in U_0$ . Wähle nun einen Weg  $\alpha$  von  $u$  nach  $p_0$  in  $U_0$ . Dann ist  $F_0 \circ \alpha$  ein Weg in  $V$ , der in  $F_0(u)$  startet und in  $q$  aufhört. Betrachte nun den Lift  $\tilde{\gamma}$  von  $\gamma$  bzgl.  $F_0$ , der in  $p$  startet und den Lift  $\beta$  des zu  $F_0 \circ \alpha$  inversen Weges  $-F_0 \circ \alpha$  bzgl.  $F$ , der in  $\tilde{\gamma}(1)$  beginnt. Für  $\beta(1)$  gilt:  $\beta(1) \in F_0^{-1}(u)$ .

Mit mehr Kenntnissen aus der algebraischen Topologie kann man zeigen, dass  $\beta(1)$  nur von  $u$  und der Homotopieklasse  $[\gamma]$  abhängt. Wir setzen  $\beta(1) := [\gamma] \cdot u$ . Die Abbildung  $g : U_0 \rightarrow U_0, u \mapsto [\gamma] \cdot u$ , ist ein Homöomorphismus, für den  $F_0 \circ g = F_0$  gilt. Dies definiert eine Gruppenwirkung von  $\pi_1(V, q)$  auf  $F_0$ .

Die Wirkung von  $\pi_1(V, q)$  auf  $F_0$  erhält die Fasern von  $F_0$ . Zudem ist  $U_0/\pi_1(V, q)$  homöomorph zu  $V$  ist. Gegeben sei eine Untergruppe  $H$  von  $\pi_1(V, q)$ . Die eben definierte Gruppenwirkung können wir auf eine Wirkung von  $H$  auf  $F_0$  einschränken. Die kanonische Projektion  $\pi : U_0 \rightarrow V$  ist eine Überlagerung von  $V$ . Tatsächlich hat jede zusammenhängende Überlagerung von  $V$  diese Form. Außerdem sind je zwei zusammenhängende Überlagerungen  $\pi_1 : U_0/H_1 \rightarrow V$  und  $\pi_2 : U_0/H_2 \rightarrow V$  von  $V$  genau dann äquivalent, wenn sie derselben Konjugationsklasse angehören, d.h.  $H_1 = [\gamma]H_2[\gamma]^{-1}$ ,  $[\gamma] \in \pi_1(V, q)$ .

Sei nun eine zusammenhängende Überlagerung  $F : U \rightarrow V$  von  $V$  gegeben. Wähle ein  $p \in F^{-1}(q)$  und die Untergruppe  $H := \{[\gamma] \mid [\gamma] \in \pi_1(V, q), [\gamma] \cdot p = p\}$  von  $\pi_1(V, q)$ . Die Untergruppe  $H$  hängt von  $p$  ab, jedoch ist die Konjugationsklasse von  $H$  unabhängig von  $p$ . Aus der Art und Weise wie  $H$  gewählt wurde folgt, dass der Grad von  $F$  gleich dem Index von  $H$  in  $\pi_1(V, q)$  entspricht. Daher folgt:

**Satz 5.28.** *Sei  $V$  eine Riemannsche Fläche und  $q \in V$  ein Basispunkt, dann gibt es eine 1-1 Korrespondenz zwischen:*

- Äquivalenzklassen zusammenhängender Überlagerungen  $F : U \rightarrow V$  von  $V$
- Konjugationsklassen von Untergruppen von  $\pi_1(V, q)$ .

Sei  $F : U \rightarrow V$  eine zusammenhängende Überlagerung von  $V$  mit Grad  $d \in \mathbb{N}$ . Dies bedeutet, dass jeder Punkt in  $p \in V$  genau  $d$  Urbilder hat und aus unseren Überlegungen folgt, dass der Index einer Untergruppe  $H$  von  $\pi_1(V, q)$  gleich  $d$  ist, falls  $F$  zu  $H$  korrespondiert. Setze nun  $F^{-1}(q) := \{x_1, \dots, x_d\}$ . Jede Schleife  $\gamma$  in  $V$  mit Basispunkt  $q$  kann zu genau  $d$  Pfaden  $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_d$  geliftet werden, wobei  $\tilde{\gamma}_i$  der Lift von  $\gamma$  bzgl.  $F$  ist, der in  $x_i$  startet. Dies bedeutet:  $\tilde{\gamma}_i(0) = x_i$  für jedes  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Auch die Endpunkte von  $\tilde{\gamma}_i$  liegen in  $F^{-1}(q)$ , da  $F \circ \tilde{\gamma}_i = \gamma_i$  und  $\gamma_i$  eine Schleife mit Basispunkt  $q$  ist. Das heißt, dass  $\tilde{\gamma}_i(1) = x_j$  für ein  $j \in \{1, \dots, d\}$  ist. Es gilt auch, dass  $\{\tilde{\gamma}_i \mid i \in \{1, \dots, d\}\} = \{x_1, \dots, x_d\}$ . Setze  $\tilde{\gamma}_i(1) := x_{\sigma(i)}$ . Die Funktion  $\sigma$  ist eine Permutation der Elemente  $\{1, \dots, d\}$ . Man kann zeigen, dass  $\sigma$  nur von der Homotopieklasse von  $\gamma$  abhängt. So erhält man einen Gruppenhomomorphismus

$$\rho : \pi_1(V, q) \rightarrow S_d,$$

wobei  $S_d := \{\sigma \mid \sigma \text{ ist eine Permutation der Menge } \{1, \dots, d\}\}$ .

**Definition 5.29.** *Wir nennen den obigen Gruppenhomomorphismus  $\rho : \pi_1(V, q) \rightarrow S_d$  die Monodromiedarstellung einer Überlagerung  $F : U \rightarrow V$  von  $V$  mit endlichem Grad  $d$ .*

**Definition 5.30.** *Eine Untergruppe  $H$  von  $S_d$  heißt transitiv, falls es zu jedem Paar  $(i, j)$ ,  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ , ein  $\sigma \in H$  gibt, sodass  $\sigma(i) = j$ .*

**Lemma 5.31.** *Das Bild der Monodromiedarstellung  $\rho : \pi_1(V, q) \rightarrow S_d$  einer endlichen zusammenhängenden Überlagerung  $F : U \rightarrow V$  von  $V$  ist transitiv.*

Wir werden nun die Monodromiedarstellung einer nicht-konstanten holomorphen Abbildung  $F : X \rightarrow Y$  zwischen kompakten Riemannschen Flächen diskutieren. Man vergleiche die folgenden Erklärungen mit [Mir95], S.87-89.

$F$  ist im Allgemeinen keine Überlagerung von  $Y$ , da  $F$  eventuell Verzweigungspunkte besitzt. Sei  $R \subseteq X$  die Menge der Verzweigungspunkte von  $F$  und  $B := F(R)$ . Da  $X$  kompakt ist, sind sowohl  $R$  als auch  $B$  endlich. Setze  $V = Y \setminus B$  und  $X \setminus R$ . Dadurch, dass wir alle Verzweigungspunkte von  $F$  in  $X$  und dass wir alle Punkte in  $Y$  entfernt haben, deren Urbilder möglicherweise Verzweigungspunkte sind und dass  $F$  eine nicht-konstante holomorphe Abbildung zwischen **kompakten** Riemannschen Flächen ist, ist die Restriktion  $F|_U : U \rightarrow V$  eine Überlagerung von  $V$  mit endlichem Grad  $d$ . Demnach hat diese Überlagerung eine Monodromiedarstellung  $\rho : \pi_1(V, q) \rightarrow S_d$ . Wir nennen  $\rho$  die Monodromiedarstellung von  $F$ . Die offene Menge  $U$  ist zusammenhängend, weil  $X$  zusammenhängend ist, weswegen das Bild von  $\rho$  nach Lemma 5.31 eine transitive Untergruppe von  $S_d$  ist. Wir können diesen Vorgang aber auch umkehren.

Sei  $V$  eine Riemannsche Fläche und wähle  $q \in V$  als Basispunkt. Zudem sei ein Gruppenhomomorphismus  $\rho : \pi_1(V, q) \rightarrow S_d$  gegeben, sodass das Bild von  $\rho$  eine transitive Untergruppe von  $S_d$  ist. Wir fixieren nun einen Index, z.B. 1 und setzen  $H := \{[\gamma] \in \pi_1(V, q) \mid \rho([1])(1) = 1\}$ .  $H$  ist eine Untergruppe von  $\pi_1(V, q)$  mit Index  $d$ . Nach der vorangegangenen Diskussion korrespondiert zu  $H$  eine zusammenhängende Überlagerung  $F_\rho : U_\rho \rightarrow V$  von  $V$ . Nach Konstruktion ist  $\rho$  die Monodromiedarstellung von  $F_\rho$ . Auf analoge Weise wie Miranda in [Mir95] beweist, dass  $\mathbb{C}/\Gamma$  eine Riemannsche Fläche ist, wobei  $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$  ein Gitter ist, kann man zeigen, dass man auf  $U_\rho$  auf eindeutige Weise eine komplexe Struktur definieren kann, sodass  $U_\rho$  eine Riemannsche Fläche und  $F_\rho$  holomorph ist.

**Satz 5.32.** (vgl. [Mir95], S. 86) Sei  $F : U \rightarrow \Delta$  eine endliche zusammenhängende Überlagerung, wobei  $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ . Dann ist  $U$  isomorph zu einer punktierten Kreisscheibe und es existieren holomorphe Koordinaten  $w$  auf  $\Delta$  und  $z$  auf  $U$ , sodass  $F$  durch  $w = z^N$  für ein  $N \in \mathbb{N}$  gegeben ist.

*Beweis.* Sei  $q \in \Delta$ .  $F_0 : \mathbb{H} \rightarrow \Delta, z \mapsto \exp(2\pi iz)$ , ist eine universelle Überlagerung von  $\Delta$ . Nach Satz 5.28 korrespondiert die Äquivalenzklasse von  $F$  zu einer Konjugationsklasse einer Untergruppe  $G$  von  $\pi_1(\Delta, q)$ . Demnach ist es für unseren Beweis hinreichend, die Aussage des Satzes für jede zusammenhängende Überlagerung zu testen, die zu einer Untergruppe in  $\pi_1(\Delta, q)$  korrespondiert.

Die Homomorphismen, welche durch die Elemente aus  $\pi_1(\Delta, q)$  induziert werden, sind die Abbildungen  $T_n(z) = z + n, n \in \mathbb{Z}$ . Wie in Beispiel 5.23 erwähnt, ist  $\pi_1(\Delta, q) \cong \mathbb{Z}$ . Demnach sind alle Untergruppen in  $\pi_1(\Delta, q)$  nach Identifikation in  $\mathbb{Z}$  von der Form  $N\mathbb{Z}$ .

$N = 0$ :  $N\mathbb{Z}$  ist isomorph zur trivialen Untergruppe von  $\pi_1(\Delta, q)$  und diese triviale Untergruppe korrespondiert zu  $F_0$ . Der Grad von  $F_0$  ist unendlich.

$N = 1$ : In diesem Fall ist  $N\mathbb{Z}$  isomorph zu  $\pi_1(\Delta, q)$  und die zugehörige zusammenhängende Überlagerung ist die Identität auf  $\Delta$ .

$N \geq 2$ : Sei  $G$  die Untergruppe in  $\pi_1(\Delta, q)$ , die zu  $N\mathbb{Z}$  korrespondiert. Aus unserer obigen Bemerkung folgt, dass  $\mathbb{H}/G = \mathbb{H}/\tilde{T}_N$ , wobei  $\tilde{T}_N$  die Gruppe ist, die durch  $T_N, T_N(z) = z + N$ , erzeugt wird. Sei  $F_N : \mathbb{H}/\tilde{T}_N \rightarrow \Delta$  die zu  $G$  gehörige zusammenhängende Überlagerung. Die Menge  $D_N := \varphi(\mathbb{H})$ ,  $\varphi(z) = \exp(\frac{2\pi iz}{N})$ , ist eine punktierte Kreisscheibe. Die  $2\pi i$  Periodizität der Exponentialfunktion garantiert die Wohldefiniertheit von  $\Phi : \mathbb{H}/\tilde{T}_N \rightarrow D_N, [z] \mapsto \exp(\frac{2\pi iz}{N})$ . Zudem ist  $\Phi$  per Konstruktion surjektiv und dass  $\Phi$  injektiv ist, ist klar. Daher ist  $\Phi$  biholomorph. Damit haben wir gezeigt, dass  $\mathbb{H}/\tilde{T}_N$  isomorph zu einer punktierten Kreisscheibe ist.  $w_N = \exp(\frac{2\pi iz}{N})$  ist eine holomorphe Koordinate auf  $D_N$  und  $z$  sei hierbei die holomorphe Koordinate auf  $\mathbb{H}$ , welche durch die Identität auf  $\mathbb{H}$  definiert ist. Sei  $w_1$  die holomorphe Koordinate auf  $\Delta$ , welche durch  $F_0$  definiert ist. Nach Definition der Gruppenwirkung von  $\pi_1(\Delta, q)$  bzw.  $H$  auf  $F_0$  gilt:  $F_N([z]) = F_0(z)$  für jedes  $[z] \in \mathbb{H}/\tilde{T}_N$ . Es folgt so, dass die zusammenhängende Überlagerung  $F_N \circ \Phi^{-1} : D_N \rightarrow \Delta$  durch  $w_1 = w_N^N$  gegeben ist. Insgesamt folgt so, dass eine holomorphe Koordinate  $z_N$  auf  $H/\tilde{T}$  existiert, sodass  $F_N$  durch  $w_1 = z_N^N$  gegeben ist.

□

**Bemerkung 5.33.** Die Aussage gilt natürlich auch für zusammenhängende Überlagerungen von  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$  für  $r > 0$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

**Satz 5.34.** (vgl. [Mir95], S. 90) Sei  $Y$  eine kompakte Riemannsche Fläche,  $B \subseteq Y$  eine endliche Teilmenge,  $V := Y \setminus B$  und  $q \in V$ . Sei außerdem  $\rho : \pi_1(V, q) \rightarrow S_d$  ein Gruppenhomomorphismus, sodass das Bild von  $\rho$  eine transitive Untergruppe von  $S_d$  ist. Dann existiert eine kompakte Riemannsche Fläche  $X_\rho$  und eine holomorphe Abbildung  $\tilde{F} : X_\rho \rightarrow Y$ , sodass  $\rho$  die Monodromiedarstellung von  $\tilde{F}$  ist.

*Beweis.* Gemäß Satz 5.28 existiert zu  $\rho$  eine zusammenhängende Überlagerung  $F : U_\rho \rightarrow V$  von Grad  $d$ . Wie bereits erwähnt, kann man auf eindeutige Weise eine komplexe Struktur auf  $U_\rho$  definieren, sodass  $U_\rho$  eine Riemannsche Fläche und  $F$  holomorph ist. Wir betrachten nun einen Punkt  $b \in B$ .

Sei  $W \subseteq Y$  eine Umgebung von  $b$ , sodass  $W \setminus \{b\}$  isomorph zu einer punktierten Kreisscheibe ist. Falls  $W$  klein genug ist, können wir  $F^{-1}(W \setminus \{b\})$  derart in disjunkte offene Mengen  $(\tilde{U}_j)_{j \in J}$ ,  $J$  eine endliche Indexmenge, zerlegen, dass  $F_j := F|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \rightarrow W \setminus \{b\}$  eine Überlagerung von  $W \setminus \{b\}$  ist. Dies ist möglich, weil  $F$  eine Überlagerung von  $V$  ist. Da  $F_j$  eine endliche zusammenhängende Überlagerung einer punktierten Kreisscheibe ist, ist nach Satz 5.32  $U_j$  isomorph zu einer punktierten Kreisscheibe und es existiert eine holomorphe Koordinate  $w$  auf  $W \setminus \{b\}$ , eine holomorphe Koordinate  $u_j$  auf  $\tilde{U}_j$  sowie  $m_j \in \mathbb{N}$ , sodass  $F$  eingeschränkt auf  $\tilde{U}_j$  durch  $w = u_j^{m_j}$  gegeben ist. Man bemerke, dass wir stets dieselbe Koordinate  $w$  auf  $W \setminus \{b\}$  nehmen. Falls notwendig, können wir  $W$  weiter verkleinern, sodass  $W$  in einer Koordinatenumgebung von  $Y$  enthalten ist.

Nun müssen wir die Löcher in  $\tilde{U}_j$  stopfen. Da  $F_j$  durch  $w = u_j^{m_j}$  gegeben ist und  $\tilde{U}_j$  isomorph zu einer punktierten Kreisscheibe ist, können wir nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz  $F_j$  auf eindeutige Weise holomorph zu einer Abbildung  $\tilde{F}_j : U_j \rightarrow W$  fortsetzen, sodass  $\tilde{U}_j \subseteq U_j$ , wobei  $U_j$  eine nicht-punktierte Kreisscheibe sei,  $\tilde{F}_j|_{\tilde{U}_j} = F_j$  und  $\tilde{F}_j(p) = b$ , wobei  $\{p\} = U_j \setminus \tilde{U}_j$ .

Auf diese Weise können wir in jedem Punkt in  $B$  vorgehen und können so, indem wir alle einzelnen Fortsetzungen miteinander kombinieren, eine holomorphe Fortsetzung  $\tilde{F} : X_\rho \rightarrow Y$  von  $F$  konstruieren, wobei per Konstruktion natürlich  $U_\rho \subseteq X_\rho$  gilt.

Es gilt zudem, dass  $X_\rho$  kompakt ist, denn betrachte  $Z := Y \setminus W$ . Die Menge  $Z$  ist kompakt, da  $Y$  kompakt und  $W$  offen ist.  $F^{-1}(Z) \subseteq X_\rho$  ist kompakt, da  $F$  eine Überlagerung mit endlichem Grad und  $Z$  kompakt ist. Nun ist  $X_\rho$  die Vereinigung der  $Z$ s und der Abschlüsse der  $U_j$ s und demnach als Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen kompakt. Basierend auf der Weise wie  $\tilde{F}$  konstruiert wurde, ist  $\rho$  offensichtlich die Monodromiedarstellung von  $\tilde{F}$ .  $\square$

**Korollar 5.35.** *Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  eine nicht-konstante eigentliche holomorphe Abbildung. Dann existiert eine kompakte Riemannsche Fläche  $\bar{X}$  und eine holomorphe Abbildung  $\tilde{F} : \bar{X} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , sodass  $X \subseteq \bar{X}$ ,  $\tilde{F}|_X = F$  und  $\tilde{F}^{-1}(\{\infty\}) = \bar{X} \setminus X$ . Zudem ist der Grad von  $\tilde{F}$  gleich dem Grad von  $F$ .*

*Beweis.* Sei  $d := \deg(F)$ . Da  $F$  eigentlich ist, ist die Menge der Verzweigungspunkte  $R$  von  $F$  endlich. Setze  $U := X \setminus R$  und  $V := \mathbb{C} \setminus F(R)$ .  $U$  und  $V$  sind Riemannsche Flächen, da  $R$  und  $F(R)$  endlich sind.  $F|_U : U \rightarrow V$  ist dann eine Überlagerung von  $V$  mit endlichem Grad  $d$  ist. Sei  $\rho : \pi_1(V, q) \rightarrow S_d$  die Monodromiedarstellung von  $F$ . Da  $\hat{\mathbb{C}}$  kompakt ist, kann man nun auf die exakt selbe Weise wie in Satz 5.34 eine kompakte Riemannsche Fläche  $\bar{X}$  und eine holomorphe Abbildung  $\tilde{F} : \bar{X} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  von Grad  $d$  konstruieren, sodass  $X \subseteq \bar{X}$ ,  $\tilde{F}|_X = F$  und  $\tilde{F}^{-1}(\infty) = \bar{X} \setminus X$ . Letzteres ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktionsweise von  $\tilde{F}$ , die im Beweis von Satz 5.34 beschrieben wurde.  $\square$

**Bemerkung 5.36.**

- (i) *Wir nennen  $\tilde{F}$  eine Fortsetzung von  $F$ .*
- (ii) *Die Bedingung, dass  $F$  eigentlich ist, ist für diesen Beweis zentral, weil sie garantiert, dass  $R$  endlich und dass  $F|_U$  eine endliche Überlagerung ist.*

Nach diesem kurzen Exkurs können wir anfangen, die Modulkurven zu konstruieren.

## 5.4 Existenz von $\bar{X}_p$

Mit Satz 5.34 haben wir fast alles, was wir benötigen, um zu zeigen, dass sich  $X_p$  kompaktifizieren lässt. Bevor wir dies in diesem Abschnitt beweisen, werden wir ein paar Worte über freie Gruppenwirkungen verlieren. In diesem Abschnitt



orientieren wir uns an Kapitel 7.2.4 aus dem Buch [Don11] von Simon Donaldson.

**Definition 5.37.** Sei  $G$  eine Gruppe, die auf eine Menge  $X$  wirkt. Wir nennen diese Gruppenwirkung **frei**, falls gilt:

$$\forall x \in X : gx = x \implies g = e$$

Ein Beispiel für eine freie Gruppenwirkung ist die Gruppenwirkung von  $\Gamma_p$  auf  $\mathbb{H}$  für jede Primzahl  $p$ . Wir werden den Beweis nur für Primzahlen führen, die größer sind als 3, denn in den Fällen  $p \in \{2, 3\}$  muss man bei der folgenden Rechnung noch eine Fallunterscheidung machen, was an dieser Stelle nicht zielführend ist, da wir uns nur für die Riemannsche Fläche  $X_7$  interessieren.

**Lemma 5.38.** (vgl. [Don11], S.39) Sei  $p \geq 5$  eine Primzahl, dann wirkt  $\Gamma_p$  frei auf  $\mathbb{H}$ .

*Beweis.* Sei  $z \in \mathbb{H}$  und  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , wobei  $ad - bc = 1$  und entweder  $b = c = 0 \pmod p$  und  $a = d = 1 \pmod p$  oder  $b = c = 0 \pmod p$  und  $a = d = -1 \pmod p$  gilt. Es gelte zudem:

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

Falls  $c = 0$ , ist entweder  $A \in \{E, -E\}$  oder  $\infty$  ist die einzige Lösung dieser Gleichung in  $\hat{\mathbb{C}}$  und hat somit keine Lösung in  $\mathbb{H}$ . Im Falle, dass  $c \neq 0$ , können wir die obige Gleichung zu

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

umformen und diese Gleichung ist genau dann lösbar, wenn die Diskriminante  $(d - a)^2 + 4bc$  negativ ist. Nun gilt aber:

$$(d - a)^2 + 4bc = d^2 + 2ad + a^2 - 4ad + 4bc = (d + a)^2 - 4$$

wobei man bedenkt, dass  $ad - bc = 1$  gilt. Damit die Diskriminante negativ ist, muss  $|d - a| < 2$  gelten. Sofern  $p \geq 5$ , ist dies nicht möglich. Insgesamt folgt, dass  $z = \frac{az + b}{cz + d}$  impliziert, dass  $A \in \{E, -E\} = [E] \in PSL_2(\mathbb{Z})$ .

Damit wirkt  $\Gamma_p$  frei auf  $\mathbb{H}$ . □

**Bemerkung 5.39.** Es sei hier erwähnt, dass  $\Gamma_p$  auch im Fall  $p \in \{2, 3\}$  frei auf  $\mathbb{H}$  wirkt.

Nun haben wir alle Daten beisammen, die wir benötigen, um zu beweisen, dass sich  $X_p$  kompaktifizieren lässt.

**Satz 5.40.** Sei  $p \geq 5$  eine Primzahl. Dann existiert eine Riemannsche Fläche  $\overline{X}_p$ , sodass  $X_p \subseteq \overline{X}_p$ . Das Geschlecht  $g$  von  $\overline{X}_p$  ist durch die folgende Formel gegeben:

$$g = 1 + \frac{(p-6)(p^2-1)}{24}.$$

*Beweis.* Wir erinnern uns daran, dass wir in Abschnitt 5.2 notiert haben, dass ein Homöomorphismus  $\psi : \mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$  existiert. Wir können fordern, dass  $\psi(PSL_2(\mathbb{Z})i) = i$  und  $\psi(PSL_2(\mathbb{Z})\varrho) = \varrho$ . Andernfalls kann man eine Möbiustransformation  $\alpha$  wählen, sodass

$$\alpha(\psi(PSL_2(\mathbb{Z})i)) = i \text{ und } \alpha(\psi(PSL_2(\mathbb{Z})\varrho)) = \varrho.$$

$\alpha \circ \psi$  wäre dann nach wie vor ein Homöomorphismus von  $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$  nach  $\mathbb{C}$ . Außerdem haben wir zu Beginn dieses Kapitels gezeigt, dass  $\Gamma_p$  ein Normalteiler von  $PSL_2(\mathbb{Z})$ , weswegen  $G := PSL_2(\mathbb{Z})/\Gamma_p$  eine Gruppe ist.

Nach dieser kurzen Erinnerung können wir uns dem Beweis von Satz 5.40 widmen. Wir werden diesen Beweis in fünf Schritten durchführen:

- (1) Die Abbildung

$$m : G \times X_p \rightarrow X_p, (\Gamma_p \circ g, \Gamma_p h) \mapsto \Gamma_p g(h),$$

$\Gamma_p \circ g := \{\gamma \circ g \mid \gamma \in \Gamma_p\}$ , ist wohldefiniert. Zudem ist diese Abbildung eine effektive, holomorphe und eigentlich diskontinuierliche Gruppenwirkung auf  $X_p$ . Daraus ergibt sich nach Satz 3.1, dass  $X_p/G$  eine Riemannsche Fläche und die kanonische Projektion  $\pi : X_p \rightarrow X_p/G$  holomorph ist. Zudem gilt  $\text{mult}_p(\pi) = |G_p|$  für jedes  $p \in X_p$ . Für die Äquivalenzklassen in  $X_p/G$  gilt:

$$[\Gamma_p h] = \{(\Gamma_p \circ g) \cdot \Gamma_p h \mid g \in PSL_2(\mathbb{Z})\} = \{\Gamma_p g(h) \mid g \in PSL_2(\mathbb{Z})\}.$$

(2)  $|G| = \frac{(p^2-1)}{2} := N$

(3)  $\Phi : X_p/G \rightarrow \mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z}), [\Gamma_p h] \mapsto PSL_2(\mathbb{Z})h$ , ist ein Homöomorphismus.

(4)  $F := \psi \circ \Phi \circ \pi : X_p \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine nicht-konstante eigentliche holomorphe Abbildung.

(5) Nach Korollar 5.35 existiert nun eine Fortsetzung  $\tilde{F} : \bar{X}_p \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  von  $F$ . In diesem Schritt werden wir alle Verzweigungspunkte von  $\tilde{F}$  samt ihrer Multiplizitäten bestimmen. Die Aussage des Satzes folgt dann unmittelbar aus der Hurwitz-Formel. Für den Beweis dieser Formel verweisen wir auf das Werk [Mir95] von Rick Miranda.

**Schritt 1:**  $m : G \times X_p \rightarrow X_p$  ist wohldefiniert und eine effektive, eigentlich diskontinuierliche und holomorphe Gruppenwirkung auf  $X_p$ .

**Wohldefiniertheit:**

Sei  $\Gamma_p h \in X_p$  und  $\Gamma_p \circ g = \Gamma_p \circ g' \in G$ . Demnach existiert ein  $\gamma \in \Gamma_p$ , sodass  $g' = \gamma \circ g$ . Es gilt:  $(\Gamma_p \circ g') \cdot (\Gamma_p h) = \Gamma_p g'(h) = \Gamma_p(\gamma \circ g)(h) \stackrel{\gamma \in \Gamma_p}{=} \Gamma_p g(h)$ .

Sei nun  $\Gamma_p h' \in X_p$ , sodass  $\Gamma_p h' = \Gamma_p h$ , dann gibt ein  $\gamma \in \Gamma_p$ , sodass  $h' = \gamma(h)$ .

Für jedes  $g \in PSL_2(\mathbb{Z})$  gilt  $g \circ \Gamma_p = \Gamma_p \circ g$ , wobei  $g \circ \Gamma_p := \{g \circ \gamma \mid \gamma \in \Gamma_p\}$ , weil  $\Gamma_p$  ein Normalteiler von  $PSL_2(\mathbb{Z})$  ist. Dies impliziert, dass ein  $\hat{\gamma} \in X_p$  existiert, sodass  $g \circ \gamma = \hat{\gamma} \circ g$ . Nun gilt

$$(\Gamma_p \circ g) \cdot (\Gamma_p h') = \Gamma_p g(h') = \Gamma_p(g \circ \gamma)(h) = \Gamma_p((\hat{\gamma} \circ g)(h)) \stackrel{\hat{\gamma} \in \Gamma_p}{=} \Gamma_p(g(h)).$$

Dementsprechend ist die oben definierte Abbildung wohldefiniert. Offensichtlich handelt es sich hierbei um eine Gruppenwirkung von  $G$  auf  $X_p$ .

**Effektiv:** Angenommen, es gibt ein nichttriviales Element  $\Gamma_p \circ g$ , das heißt, dass  $\Gamma_p \circ g \neq \Gamma_p \circ [E]$  und somit  $g \notin \Gamma_p$ , sodass  $(\Gamma_p \circ g)(\Gamma_p h) = \Gamma_p h$  für alle  $h \in \mathbb{H}$  gilt. Dies impliziert, dass zu jedem  $h \in \mathbb{H}$  ein  $\gamma_h \in \Gamma_p$  existiert, sodass  $(\gamma_h \circ g)(h) = h$ . Da  $g \notin \Gamma_p$ , jedoch  $\gamma_h \in \Gamma_p$  und  $\Gamma_p$  eine Gruppe ist, folgt, dass  $\gamma_h \circ g \notin \Gamma_p$ , also insbesondere  $\gamma_h \circ g \neq [E]$  gilt. Das heißt, dass jedes Element in  $\mathbb{H}$  einen nichttrivialen Stabilisator in  $PSL_2(\mathbb{Z})$  besitzt. Jedoch wirkt  $PSL_2(\mathbb{Z})$  holomorph und eigentlich diskontinuierlich auf  $\mathbb{H}$ , weshalb die Menge der Elemente in  $\mathbb{H}$ , die einen nichttrivialen Stabilisator in  $PSL_2(\mathbb{Z})$  besitzen, nach Lemma 3.7 diskret ist. Es folgt so, dass  $\mathbb{H}$  eine diskrete Menge ist, was ein Widerspruch ist.

**Eigentlich diskontinuierlich:** Es gilt  $G \cong PSL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  und  $PSL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  ist endlich, weshalb auch  $G$  endlich ist. Da  $G$ , wie soeben nachgewiesen, zusätzlich effektiv auf den Hausdorff-Raum  $X_p$  wirkt, wirkt  $G$  nach Bemerkung 2.17 eigentlich diskontinuierlich auf  $X_p$ .

**Holomorph:**

Sei  $\Gamma_p \circ g \in G$ . Wir definieren  $\varphi_g : X_p \rightarrow X_p$ ,  $\Gamma_p h \mapsto \Gamma_p g(h)$  und  $\tilde{\pi} : \mathbb{H} \rightarrow X_p$ ,  $h \mapsto \Gamma_p h$ . Sei  $\Gamma_p h \in X_p$ . Da  $\Gamma_p$  frei auf  $\mathbb{H}$  wirkt, ist der Stabilisator von  $h$  in  $\Gamma_p$  trivial. Zudem wirkt  $\Gamma_p$  eigentlich diskontinuierlich und holomorph auf  $\mathbb{H}$ . Daher gibt es nach Bemerkung 3.6 eine Umgebung  $U$  von  $h$  und eine offene Menge  $V \subseteq X_p$ , sodass  $\Psi := \tilde{\pi}|_U : U \rightarrow V$ ,  $u \mapsto \Gamma_p u$ , ein Homöomorphismus ist. Für  $\Gamma_p u \in V$  liegt  $\Psi^{-1}(\Gamma_p u)$  in  $\Gamma_p u$  und wir schreiben  $\Psi^{-1}(\Gamma_p u) := u^* \in U$ . Des Weiteren definieren wir  $\tilde{g} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $z \mapsto gz$ . Nun haben wir:

$$(\tilde{\pi} \circ \tilde{g})(\Psi^{-1}(\Gamma_p u)) = \tilde{\pi}(\tilde{g}(u^*)) = \Gamma_p g(u^*) = \Gamma_p g(u) = \varphi_g(\Gamma_p u).$$

Die vorletzte Gleichung gilt, weil die oben definierte Gruppenwirkung wohldefiniert ist.  $\tilde{\pi}$ ,  $\tilde{g}$  und  $\Psi^{-1}$  sind holomorph, was bedeutet, dass  $\varphi_g = \tilde{\pi} \circ \tilde{g} \circ \Psi^{-1}$  als Verkettung holomorpher Abbildungen auf  $V$  holomorph also insbesondere in  $\Gamma_p h$  holomorph ist. Da  $\Gamma_p h$  beliebig gewählt wurde, ist  $\varphi_g$  holomorph auf  $X_p$ . Somit folgt, dass die oben definierte Gruppenwirkung holomorph ist.

Das oben gezeigte impliziert, dass  $X_p/G$  eine Riemannsche Fläche und die kanonische Projektion  $\pi : X_p \rightarrow X_p/G$  holomorph ist. Zudem gilt  $\text{mult}_p(\pi) = |G_p|$  für jedes  $p \in X_p$ .

**Schritt 2:**  $|G| = N$

- $|GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = (p^2 - 1)(p^2 - p)$ : Jeder Vektor  $v \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$  auBer dem Nullvektor ist für die erste Spalte einer Matrix in  $GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  geeignet. Das heißt, man hat  $p^2 - 1$  als Wahl für den ersten Spaltenvektor. Für den zweiten Spaltenvektor kann man jeden Vektor aus  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \setminus \text{span}(v)$  wählen. Dies heißt, es stehen für den zweiten Spaltenvektor  $p^2 - p$  Vektoren zur Verfügung. So ergibt sich  $|GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = (p^2 - 1)(p^2 - p)$
- $SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \text{Ker}(GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\det} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times)$  und  $|(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times| = p - 1$ . Nach dem Satz von Lagrange gilt, dass  $|SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = \frac{(p^2-1)(p^2-p)}{p-1} = (p^2 - 1)p$ .
- Da  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/\{-E, E\}$ , gilt  $|PSL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = \frac{(p^2-1)p}{2}$ .

**Schritt 3:**  $\Phi$  ist ein Homöomorphismus.

Wir betrachten die folgenden Abbildungen:

- $j : X_p \rightarrow \mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z}), \Gamma_p h \mapsto PSL_2(\mathbb{Z})h$
- $\hat{\pi} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z}), h \mapsto PSL_2(\mathbb{Z})h$

$\pi : X_p \rightarrow X_p/G$  und  $\bar{\pi} : \mathbb{H} \rightarrow X_p$  seien weiterhin die kanonischen Projektionen. Wir wollen zeigen, dass  $\Phi$  ein Homöomorphismus ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass  $\Phi$  wohldefiniert ist:

$$\begin{aligned} [\Gamma_p h] &= [\Gamma_p h'] \\ \implies \exists \Gamma_p \circ g \in G : \Gamma_p h' &= (\Gamma_p \circ g) \cdot \Gamma_p h = \Gamma_p g(h) \\ \implies \gamma(g(h)) &= h' \quad \text{für ein } \gamma \in \Gamma_p \\ \implies PSL_2(\mathbb{Z})h &= PSL_2(\mathbb{Z})h'. \end{aligned}$$

Die letzte Implikation gilt, da  $\gamma \circ g \in PSL_2(\mathbb{Z})$ . Jetzt beweisen wir, dass  $\Phi$  injektiv ist.

$$\begin{aligned} \Phi([\Gamma_p h]) &= \Phi([\Gamma_p h']) \\ \implies PSL_2(\mathbb{Z})h &= PSL_2(\mathbb{Z})h' \\ \implies gh &= h' \quad \text{für ein } g \in PSL_2(\mathbb{Z}) \\ \implies (\Gamma_p \circ g) \cdot (\Gamma_p h) &= \Gamma_p(gh) = \Gamma_p h' \\ \implies [\Gamma_p h] &= [\Gamma_p h']. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist  $\Phi$  surjektiv und mit dem eben gezeigten bijektiv.

Dass  $j$  wohldefiniert ist, ergibt sich aus der Tatsache, dass  $\Gamma_p$  eine Untergruppe von  $PSL_2(\mathbb{Z})$  ist. Wir zeigen nun, dass  $j$  stetig ist. Sei  $O \subseteq \mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$  offen.

$j^{-1}(O) \subseteq X_p$  ist nach der Definition der Quotiententopologie auf  $X_p$  genau dann offen, wenn  $\bar{\pi}^{-1}(j^{-1}(O)) \subseteq \mathbb{H}$  offen ist. Die Menge

$$\begin{aligned} \bar{\pi}^{-1}(j^{-1}(O)) &= \{h \in \mathbb{H} \mid \Gamma_p h \in j^{-1}(O)\} \\ &= \{h \in \mathbb{H} \mid j(\Gamma_p h) \in O\} \\ &= \{h \in \mathbb{H} \mid PSL_2(\mathbb{Z})h \in O\} = \hat{\pi}^{-1}(O) \end{aligned}$$

ist offen, denn  $\hat{\pi}$  ist stetig. Dies bedeutet, dass  $j = \Phi \circ \pi$  stetig ist. Sei  $V \subseteq \mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$  offen.  $(\Phi \circ \pi)^{-1}(V) = \pi^{-1}(\Phi^{-1}(V)) \subseteq X_p$  ist offen, weil  $\Phi \circ \pi$  stetig ist. Aus der Definition der Quotiententopologie auf  $X_p/G$  folgt, dass  $\Phi^{-1}(V)$  offen und somit  $\Phi$  stetig ist. Daher ist  $\Phi$  ein Homöomorphismus.

**Schritt 4:**  $F$  ist eine nicht-konstante eigentliche holomorphe Abbildung.

$\Phi$  und  $\psi$  sind Homöomorphismen, weshalb  $\psi \circ \Phi : X_p/G \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexe Karte ist. Da  $\pi$  holomorph auf  $X_p/G$  und nicht-konstant ist, ist auch  $F = (\Phi \circ \psi) \circ \pi$  holomorph und nicht-konstant auf  $X_p/G$ . Die Verzweigungspunkte von  $F$  sind genau die Verzweigungspunkte von  $\pi$  bzw.  $f := \Phi \circ \pi$ , denn  $\Phi$  und  $\psi$  sind Homöomorphismen. Zudem gilt aus demselben Grund:  $\text{mult}_p(\pi) = \text{mult}_p(f)$  für jedes  $p \in X_p$ .

Wir werden zeigen, dass  $f$  eigentlich ist, woraus sich ergibt, dass  $F$  eigentlich ist, weil  $F = \psi \circ f$  und  $\psi$  eigentlich ist, denn  $\psi$  ist ein Homöomorphismus. Sei also  $K \subseteq \mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$  kompakt. Zu zeigen ist, dass  $f^{-1}(K) \subseteq X_p$  kompakt ist.  $G$  besitzt genau  $N$  Elemente. Wir wählen aus jeder der  $N$  Äquivalenzklassen  $[\Gamma_p \circ g]$  einen Repräsentanten  $g_i \in PSL_2(\mathbb{Z})$  aus.  $g_1, \dots, g_N$  sei die Liste dieser Repräsentanten. Wir zeigen jetzt, dass  $X_p = \bigcup_{i \in \{1, \dots, N\}} \bar{\pi}(g_i(\bar{\Omega}))$  gilt.

Sei  $\Gamma_p h \in X_p$ . Da  $\bar{\Omega}$  ein Fundamentalgebiet der Gruppenwirkung von  $PSL_2(\mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{H}$  ist, existiert ein  $\omega \in \bar{\Omega}$ , sodass  $PSL_2(\mathbb{Z})h = PSL_2(\mathbb{Z})\omega$  und somit  $h = g\omega$  für ein  $g \in PSL_2(\mathbb{Z})$ . Nun gibt es ein  $i \in \{1, \dots, N\}$ , sodass  $g_i$  ein Repräsentant von  $\Gamma_p \circ g \in G$  ist. Dies bedeutet, dass  $\Gamma_p \circ g = \Gamma_p \circ g_i$  und somit

$$\Gamma_p h = \Gamma_p g(\omega) = (\Gamma_p \circ g)(\Gamma_p \omega) = (\Gamma_p \circ g_i)(\Gamma_p \omega) = \Gamma_p g_i(\omega) \in \bar{\pi}(g_i(\bar{\Omega})).$$

Nun ist  $f^{-1}(K) \cap \bar{\pi}(g_i(\bar{\Omega}))$  für jede kompakte Teilmenge  $K \subseteq \mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$  kompakt. Somit ist

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in \{1, \dots, N\}} f^{-1}(K) \cap \bar{\pi}(g_i(\bar{\Omega})) &= f^{-1}(K) \cap \left( \bigcup_{i \in \{1, \dots, N\}} \bar{\pi}(g_i(\bar{\Omega})) \right) \\ &= f^{-1}(K) \cap X_p = f^{-1}(K) \end{aligned}$$

als Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen kompakt. Dies bedeutet, dass  $f$  eigentlich ist. Daher ist auch  $F$  eigentlich. Nach Korollar 5.35 existiert eine Fortsetzung  $\tilde{F} : \bar{X}_p \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  von  $F$ .

**Schritt 5:** Bestimme die Verzweigungspunkte mit ihren Multiplizitäten von  $\tilde{F}$

Für  $p \in X_p$  gilt  $\text{mult}_p(\tilde{F}) = \text{mult}_p(F) = \text{mult}_p(\pi)$ . Nun zeigen wir, dass  $\pi$  nur in den Punkten  $\Gamma_p x$  mit  $x \in PSL_2(\mathbb{Z})i \cup PSL_2(\mathbb{Z})\varrho$  verzweigt. Da  $\text{mult}_p(\pi) = |G_p|$ , werden wir uns mit den Stabilisatoren von  $p \in X_p$  in  $G$  befassen.

Sei  $x \in \mathbb{H} \setminus (PSL_2(\mathbb{Z})i \cup PSL_2(\mathbb{Z})\varrho)$ . Wie wir bereits gezeigt haben, haben nur die Elemente in  $PSL_2(\mathbb{Z})i \cup PSL_2(\mathbb{Z})\varrho$  nichttriviale Stabilisatoren in  $PSL_2(\mathbb{Z})$ . Sei nun  $\Gamma_p \circ g \in G$  so gewählt, dass  $(\Gamma_p \circ g)(\Gamma_p x) = (\Gamma_p x)$ . Dann gibt es ein  $\gamma \in \Gamma_p$ , sodass  $(\gamma \circ g)(x) = x$ . Daraus folgt, dass  $\gamma \circ g = [E]$  und somit  $g \in \Gamma_p$ . Dies bedeutet, dass  $\Gamma_p x$  nur vom trivialen Element  $\Gamma_p \circ [E] \in G$  fixiert wird. Das wiederum heißt, dass  $\Gamma_p x$  kein Verzweigungspunkt von  $\pi$  ist.

Wir zeigen nun, dass  $|G_{p_x}| = 2$  für  $p_x := \Gamma_p x$ ,  $x \in PSL_2(\mathbb{Z})i$  und  $|G_{p_y}| = 3$  für  $p_y := \Gamma_p y$ ,  $y \in PSL_2(\mathbb{Z})\varrho$  gilt. Wir führen den Beweis nur für die Elemente aus  $PSL_2(\mathbb{Z})i$  durch. Für  $PSL_2(\mathbb{Z})\varrho$  verläuft die Rechnung analog.

Sei  $x \in PSL_2(\mathbb{Z})i$ . Wir wissen bereits, dass  $|PSL_2(\mathbb{Z})_x| = 2$ . Wir setzen  $PSL_2(\mathbb{Z})_x := \{[E], \tilde{g}\}$ . Da  $\Gamma_p$  frei auf  $\mathbb{H}$  operiert, muss  $\tilde{g} \in PSL_2(\mathbb{Z}) \setminus \Gamma_p$  gelten. Sei nun  $\Gamma_p \circ g \in G$ , sodass  $(\Gamma_p \circ g) \cdot (\Gamma_p x) = \Gamma_p x$ . Demnach gibt es ein  $\gamma \in \Gamma_p$ , sodass  $(\gamma \circ g)(x) = x$ . Daher ist entweder  $\gamma \circ g = [E]$  oder  $\gamma \circ g = \tilde{g}$ . Das heißt, dass entweder  $g \in \Gamma_p$  oder  $\gamma \circ g = \tilde{g}$  gilt, weshalb  $G_{p_x} = \{\Gamma_p \circ [E], \Gamma_p \circ \tilde{g}\}$ . Das heißt, dass  $|G_{p_x}| = 2$ .

Man bedenke für den Beweis für  $PSL_2(\mathbb{Z})\varrho$ , dass  $|PSL_2(\mathbb{Z})_y| = 3$  gilt. Insgesamt ist  $R := \{[\Gamma_p x], [\Gamma_p y] \mid x \in PSL_2(\mathbb{Z}), y \in PSL_2(\mathbb{Z})\}$  die Menge der Verzweigungspunkte von  $\pi$ .

Wir zeigen nun, dass  $\deg_q(\pi) = N$  für jedes  $q \in X_p/G$  gilt, woraus sich  $N = \deg(F) = \deg(\tilde{F})$  ergibt. Sei  $q := \Gamma_p h \in X_p$ . Im Beweis von Korollar 3.9 haben wir nachgerechnet, dass  $\text{mult}_x(\pi) = \text{mult}_y(\pi)$  für jedes  $x, y \in \pi^{-1}([q])$  gilt.

$$\deg_{[q]}(\pi) \stackrel{\text{Satz 3.1}}{=} \sum_{x \in \pi^{-1}([q])} |G_x| = |\pi^{-1}([q])| |G_q| = |G_q| |G_q| = |G| = N$$

Indem man die Gleichung  $|\pi^{-1}([q])| |G_q| = N$  umstellt, erhält man  $|\pi^{-1}([q])| = \frac{N}{|G_q|}$  für jedes  $[q] \in X_p$ . Dies heißt, dass  $|\pi^{-1}([\Gamma_p i])| = \frac{N}{2}$  und  $|\pi^{-1}([\Gamma_p \varrho])| = \frac{N}{3}$ .

Wir haben somit alle Verzweigungspunkte von  $\tilde{F}$  samt ihrer Multiplizitäten in  $X_p$  bestimmt. Nun müssen wir die Verzweigungspunkte von  $\tilde{F}$  in  $\overline{X_p} \setminus X_p$  mit ihren Multiplizitäten ermitteln. Bedenke, dass  $\tilde{F}(\overline{X_p} \setminus X_p) = \{\infty\}$ . Sei also  $A := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$ . Dann ist  $A$  eine Umgebung von  $\infty$ .

Wir wissen, dass  $\tilde{F}^{-1}(A)$  durch  $m$  offene Mengen  $U_1, \dots, U_m$  überdeckt werden kann, wobei  $U_i \subseteq X_p$  für jedes  $i$  homöomorph zu einer punktierten Kreisscheibe ist. Dies bedeutet aber, dass jeder Punkt in  $\tilde{F}^{-1}(\infty)$  ohne Multiplizität  $m$  Urbilder hat. Unsere Gruppenwirkung impliziert, dass  $N$  durch  $m$  geteilt wird, weshalb sich insgesamt ergibt, dass jeder Punkt in  $\tilde{F}^{-1}(\infty)$  Multiplizität  $\frac{N}{m}$  hat. Wir wissen, dass  $\hat{\pi}(\overline{\Omega}) = \mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$  und haben in Abschnitt 5.2 festgehalten, dass  $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$  homöomorph zu  $\mathbb{C}$  ist. Demnach

gibt es eine Teilmenge  $A' \subseteq \bar{\Omega}$ , sodass  $\hat{\pi}(A')$  homöomorph zu  $A$  ist. Es folgt, dass  $\tilde{F}^{-1}(A) \subseteq \bigcup_{i \in \{1, \dots, N\}} \tilde{\pi}(g_i A')$ , wobei jedes  $g_i \in PSL_2(\mathbb{Z})$  eine andere Äquivalenzklasse in  $G$  repräsentiert. Nun seien  $p$  unserer Repräsentanten die Äquivalenzklassen der Abbildungen  $z \mapsto z + i := H_i(z)$ , wobei  $i \in \{0, \dots, p-1\}$ . Die Menge

$$M := \bigcup_{i \in \{0, \dots, p-1\}} H_i(A')$$

bildet eine zusammenhängende Menge in  $\mathbb{H}$  und die Abbildung  $z \mapsto z + p \in \Gamma_p$  identifiziert die beiden vertikalen Grenzen von  $M$ , woraus folgt, dass  $M$  eine einzige punktierte Kreisscheibe in  $X_p$  überdeckt.  $\tilde{F}^{-1}(A)$  wird durch  $N$  Mengen überdeckt und jeweils  $p$  davon überdecken genau eine punktierte Kreisscheibe, woraus folgt, dass  $m = \frac{N}{p}$  und die Multiplizität von jedem Punkt in  $\tilde{F}^{-1}(\infty)$  ist  $p$ . Zusammengefasst hat  $\tilde{F}$

- $\frac{N}{2} = \frac{p(p^2 - 1)}{4}$  Verzweigungspunkte der Ordnung 2,
- $\frac{N}{3} = \frac{p(p^2 - 1)}{6}$  Verzweigungspunkte der Ordnung 3,
- $\frac{N}{p} = \frac{p^2 - 1}{2}$  Verzweigungspunkte der Ordnung  $p$ .

Mit dem Satz von Hurwitz ergibt sich die Gleichung

$$2g - 2 = N \left( -2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{p-1}{p} \right).$$

Wenn man die Gleichung umstellt, ergibt sich  $g = 1 + \frac{(p-6)(p^2-1)}{24}$ . □

Die kompakt Riemannsche Fläche  $\bar{X}_7$  nennen wir die Kleinsche Kurve. Gemäß unserer Formel ist diese Fläche von Geschlecht 3. Wir haben in unserem Beweis gezeigt, dass  $PSL_2(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \cong PSL_2(\mathbb{Z})/\Gamma_7$  holomorph auf  $\bar{X}_7$  wirkt. Dies bedeutet, dass jedes Element aus  $PSL_2(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  eine biholomorphe Abbildung  $\bar{X}_7 \rightarrow \bar{X}_7$  induziert. Die Elemente aus  $PSL_2(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  induzieren jeweils verschiedene Abbildungen, weil  $PSL_2(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  effektiv auf  $\bar{X}_7$  wirkt. Wir haben bereits nachgerechnet, dass die Kardinalität von  $PSL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  gleich  $\frac{p(p^2-1)}{2}$  ist. Das heißt, dass  $PSL_2(\mathbb{Z})/\Gamma_7$  genau 168 Elemente besitzt. Demnach hat die Automorphismengruppe von  $\bar{X}_7$  mindestens 168 Elemente. Gleichzeitig wissen wir dank Hurwitz, dass  $|\text{Aut}(\bar{X}_7)| \leq 84(3-1) = 168$  gilt. Daras folgt, dass  $|\text{Aut}(\bar{X}_7)| = 168$ . Somit ist  $\bar{X}_7$  eine Hurwitz-Kurve.

---

## Quellenverzeichnis

1. [Don11] Donaldson, Simon: *Riemann Surfaces*, Oxford University Press, 2011, New York.
2. [FreiBus06] Freitag Eberhard, Busam Rolf: *Funktionentheorie 1*, 4. Aufl., Springer, 2006, Berlin, Heidelberg.
3. [Lam09] Lamotke, Klaus: *Riemannsche Flächen*, 2. Aufl., Springer, 2009, Berlin, Heidelberg.
4. [Mir95] Miranda, Rick: *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 5, American Mathematical Society, 1995.
5. [Sch15] Schwartz, Rich: *A Criterion on Hausdorff Quotients*, Online unter URL: <https://www.math.brown.edu/res/M141/hausdorff.pdf>, (Stand: 25.07.2019).
6. [tomDieck08] tom Dieck, Tammo: *Algebraic Topology*, European Mathematical Society, 2008.



---

## **Eidesstattliche Versicherung**

Hiermit versichere ich an Eides statt durch meine Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen Quellen oder sonstigen Hilfsmittel verwendet habe, als die, welche ich angegeben habe. Alle Stellen dieser Arbeit, die ich aus den Quellen wörtlich oder annähernd wörtlich übernommen habe, habe ich an den entsprechenden Stellen kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Essen, am 26.07.2019