Universität Duisburg-Essen

Fakultät für Mathematik

Isometriegruppen von Modellen der hyperbolischen Ebene

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades des

Bachelor of Science

von

Michael Andreas Tudyka

Matrikelnummer: 2282008

Studiengang: Mathematik (B. Sc.)

betreut von

Prof. Dr. Daniel Greb

Ort: Essen

Abgabetermin: 6. August 2019

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Bachelorarbeit beschäftigt sich mit verschiedenen Modellen derselben Geometrie, die alle als die hyperbolische Ebene klassifiziert werden können und konzentriert sich speziell auf die Bestimmung von Abbildungen, sogenannte Isometrien, die Abstände von Punkten auf der hyperbolischen Ebene erhalten. Die Menge aller Isometrien eines konkreten Modells bildet eine Gruppe, wobei wir die verschiedenen Isometriegruppen der unterschiedlichen Modelle ebenfalls in Verbindung bringen wollen.

Im Vergleich zur euklidischen Ebene sind die Isometrien einiger Modelle der hyperbolischen Ebene wie der Einheitskreisscheibe und der oberen Halbebene von funktionentheoretischer Natur. Konkreter bestehen diese hauptsächlich aus holomorphen Automorphismen auf sich selbst, deren Menge ebenfalls eine Gruppe bildet. Im ersten Kapitel gibt es einen kurzen Einblick über die wichtigsten Eigenschaften von Möbiustransformationen, bevor wir anschließend im zweiten Kapitel Automorphismengruppen der Einheitskreisscheibe und der oberen Halbebene berechnen.

Damit wir die einzelnen Modelle der hyperbolischen Ebene unter Berücksichtigung der Automorphismengruppe konkret angeben können, folgt mit dem dritten Kapitel der Begriff der Riemannschen Metrik, die uns sowohl dabei hilft Modelle anzugeben, als auch diese durch Isometrien in Verbindung zu setzen, um sie als gleichwertig ansehen zu können.

Im vierten Kapitel nehmen wir die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ und konstruieren konkret eine Riemannsche Metrik, sodass aus Automorphismen Isometrien werden. Wir definieren unter anderem auch hyperbolische Geraden und Strecken, die hyperbolische Längen und Abstände realisieren, um dann die Isometriegruppe von $\mathbb{H}$ zu bestimmen.

Nachdem wir mit der oberen Halbebene fertig sind, nutzen wir im letzten Kapitel Isometrien von Riemannschen Metriken, um aus der Metrik der oberen Halbebene eine neue Metrik für die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ zu konstruieren, damit wir die Isometriegruppe von $\mathbb{D}$ bestimmen können. Zum Schluss betrachten wir ein komplett anderes Modell, nämlich die Oberfläche eines Hyperboloids eingebettet in den dreidimensionalen Raum, zusammen mit dem sogenannten Lorentz-Skalarprodukt statt einer Riemannschen Metrik.

1 Möbiustransformationen

Vorausgesetzt ist die Kenntnis der Riemannschen Sphäre $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \,\dot\cup\, \{\infty\}$ und holomorphen Abbildungen der Riemannschen Sphäre auf sich selbst, wobei wir uns hierbei auf Möbiustransformationen beschränken, weil diese für die Bestimmung einiger Gruppen für unsere Modelle später von Bedeutung sind. Wir fangen mit der Definition und für uns wichtigen Eigenschaften für Möbiustransformationen an.

Definition 1.1. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$ gegeben. Dann nennen wir die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \hat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

mit $f(\infty) = \dfrac{a}{c}$ und $f\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$ eine Möbiustransformation. Die Menge aller Möbiustransformationen nennen wir $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$.

Bemerkung. Für $c = 0$ haben wir eine lineare Funktion $f(z) = a'z + b'$ auf $\mathbb{C}$ mit $a' \neq 0$ und ∞ als Fixpunkt.

Wir wollen nun zeigen, dass $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ eine Gruppe bildet und bringen diese in Verbindung mit der Gruppe invertierbarer Matrizen:

Lemma 1.2. Sei $GL(2, \mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren 2 x 2-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : GL(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \left(\varphi_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}},\ \varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}\right) \end{aligned}$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit

$$Ker(\varphi) = \left\{\lambda \cdot Id = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C}^*\right\} \cong \mathbb{C}^*$$

Vor allem bildet $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ mit der üblichen Verknüpfung von Funktionen eine Gruppe.

Beweis. (1) Die Surjektivität ist offensichtlich, da wir die Koeffizienten einer Möbiustransformation genau in der Form einer Matrix A wie oben schreiben können und diese genau $det(A) = ad - bc \neq 0$ erfüllt.

(2) Seien nun zwei Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ gegeben. Dann gilt für alle $z \in \hat{\mathbb{C}}$:

$$\varphi_A \circ \varphi_B(z) = \varphi_A\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) = \frac{a\left(\dfrac{ez+f}{gz+h}\right) + b}{c\left(\dfrac{ez+f}{gz+h}\right) + d} = \frac{(ae+bg)z + (af+bh)}{(ce+dg)z + (cf+dh)} = \varphi_{A \circ B}(z)$$

(3) Für alle $\lambda \in \mathbb{C}^*$ und $z \in \hat{\mathbb{C}}$ gilt: $\varphi_{(\lambda \cdot Id)}(z) = \frac{\lambda z}{\lambda} = z \implies \lambda \cdot Id \in Ker(\varphi)$
Umgekehrt sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Ker(\varphi)$, d.h. wir haben $\varphi_A = id$ in Möb($\hat{\mathbb{C}}$).
Wir haben dann: $\varphi_A(0) = \frac{b}{d} = 0$ sowie $ad - bc \neq 0 \implies b = 0, a \neq 0$ und $d \neq 0$, $\varphi_A(\infty) = \frac{a}{c} = \infty \implies c = 0$ und $\varphi_A(1) = \frac{a}{d} = 1 \implies a = d$, was insgesamt also $A = a \cdot Id$, $a \in \mathbb{C}^*$ liefert. □

Korollar 1.3. Möb($\hat{\mathbb{C}}$) $\cong GL(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^* \cong SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$, wobei $SL(2, \mathbb{C})$ die Untergruppe der invertierbaren Matrizen mit $det(A) = 1$ ist. In anderen Worten: Es gilt $\varphi_A = \varphi_B$ genau dann wenn $A = \lambda B$ für ein $\lambda \neq 0$.

Beweis. Die erste Isomorphie ist durch den Gruppenhomomorphismus oben gegeben. Die zweite Isomorphie sehen wir, indem wir feststellen, dass $\varphi_{(\lambda A)} = \varphi_A$ mit $\lambda = (det(A))^{-\frac{1}{2}}$ und $det(\lambda A) = 1$ gilt und $\pm Id$ die einzigen Elemente aus $SL(2, \mathbb{C})$ im Kern sind. □

Außerdem können wir jetzt die Inverse φ_A^{-1} sowie Erzeuger von Möb($\hat{\mathbb{C}}$) angeben: Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = det(A) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Dann ist $AB = det(A) \cdot Id = BA$ und für alle $z \in \hat{\mathbb{C}}$ gilt:

$$\varphi_A^{-1}(z) = \varphi_B(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

Lemma 1.4. Möb($\hat{\mathbb{C}}$) wird erzeugt durch $M_a(z) = az, T_b(z) = z + b, I(z) = \frac{1}{z}$ für $a \in \mathbb{C}^*$ und $b \in \mathbb{C}$ beliebig.

Beweis. Sei $f \in$ Möb($\hat{\mathbb{C}}$): Falls $c = 0$, gilt: $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = T_{(\frac{b}{d})} \circ M_{(\frac{a}{d})}(z)$
Falls $c \neq 0$, gilt:

$$T_{(\frac{a}{c})} \circ M_{(b - \frac{ad}{c})} \circ I \circ T_d \circ M_c(z) = T_{(\frac{a}{c})} \left(\frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} \right) = \frac{(b - \frac{ad}{c}) + \frac{a}{c}(cz + d)}{cz + d} = \frac{az + b}{cz + d} = f(z)$$

□

Weiterhin gibt es geometrische Eigenschaften von Möbiustransformationen, die wir benötigen:

Definition 1.5. Eine Menge $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ nennen wir Kreis in $\hat{\mathbb{C}}$, falls sie bereits ein Kreis in $\mathbb{C}$ ist oder falls $K = G \cup \{\infty\}$ für eine Gerade G in $\mathbb{C}$ gilt.

Bemerkung. Ein Kreis K in $\hat{\mathbb{C}}$ kann mithilfe der folgenden Gleichung beschrieben werden:

$$K = \{z \in \mathbb{C} : az\overline{z} + \beta z + \overline{\beta z} + c = 0\}$$

wobei $a, c \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\beta\overline{\beta} > ac$ gilt und wir im Fall $a = 0$ noch ∞ hinzufügen. Falls $a = 0$, gilt $\beta\overline{\beta} > ac = 0$ automatisch und wir sehen, dass

$$\beta z + \overline{\beta z} + c = 2Re(\beta z) + c = 2Re(\beta)Re(z) - 2Im(\beta)Im(z) + c = 0$$

tatsächlich eine Geradengleichung ist.
Falls $a \neq 0$, gilt:

$$az\overline{z} + \beta z + \overline{\beta z} + c = a\left|z - \left(-\frac{\overline{\beta}}{a}\right)\right|^2 + \left(c - \frac{\beta\overline{\beta}}{a}\right) = 0$$

und dies ist eine Kreisgleichung genau dann wenn ($a > 0$ und $\left(c - \frac{\beta\overline{\beta}}{a}\right) < 0$) oder ($a < 0$ und $\left(c - \frac{\beta\overline{\beta}}{a}\right) > 0$) $\iff$ $\beta\overline{\beta} > ac$.

Lemma 1.6. Möbiustransformationen erhalten Kreise, d.h. für alle Kreise $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ und $f \in$ Möb$(\hat{\mathbb{C}})$ gilt: $f(K)$ ist ein Kreis in $\hat{\mathbb{C}}$.

Beweis. Nach Lemma 1.4 kann jede Möbiustransformation als Verknüpfung von $M_a(z) = az$, $T_b(z) = z + b$ und $I(z) = \frac{1}{z}$ geschrieben werden. Die ersten beiden Typen von Erzeugern verschieben, drehen und strecken Kreise und erhalten somit diese. Für $w = \frac{1}{z}$ können wir obige Gleichung, die K definiert mit $w\overline{w}$ multiplizieren und erhalten dann für alle $z \in K$ und nur dann

$$w\overline{w}(az\overline{z} + \beta z + \overline{\beta z} + c) = a + \beta\overline{w} + \overline{\beta}w + cw\overline{w} = 0$$

Somit haben wir, dass $I(K) = \{w \in \hat{\mathbb{C}} : a + \beta\overline{w} + \overline{\beta}w + cw\overline{w} = 0\}$ auch ein Kreis ist, denn wir haben immer noch $\overline{\beta}\beta > ca$. □

Nehmen wir uns einen beliebigen Kreis K, dann besteht $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ aus genau zwei disjunkten Gebieten $G_1, G_2 \subset \hat{\mathbb{C}}$. Da für jede Möbiustransformation $f \in$ Möb$(\hat{\mathbb{C}})$, $f(K)$ ebenfalls ein Kreis ist, haben wir diesmal eine Zerlegung: $\hat{\mathbb{C}} \setminus f(K) = H_1 \dot{\cup} H_2$ für zwei Gebiete H_1 und H_2. Da f stetig und bijektiv ist, gilt $f(G_1) = H_1$ oder $f(G_1) = H_2$, o.B.d.A. sei $f(G_1) = H_1$. Wir sagen, dass G_1 (bzw. G_2) von K umrandet wird. Den Spezialfall $G_1 = H_1$ untersuchen wir nach folgender Definition im nächsten Kapitel genauer.

Definition 1.7. Sei $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein Kreis und $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein von K umrandetes Gebiet:
(1) Wir definieren Möb$(G) := \{f \in$ Möb$(\hat{\mathbb{C}}) : f(G) = G\} \subset$ Möb$(\hat{\mathbb{C}})$ als die Gruppe der Möbiustransformationen, die G festhalten.
(2) Wir definieren $Aut(G) := \{f : G \to G : f$ ist biholomorph$\}$ als die Automorphismengruppe von G.

Bemerkung. Schränken wir $f \in$ Möb(G) ein auf G, dann ist $f|_G : G \to G$ auch eine biholomorphe Selbstabbildung von G und wir können so Möb(G) als Untergruppe von $Aut(G)$ auffassen.

2 Automorphismengruppen von $\mathbb{D}$ und $\mathbb{H}$

Die für uns zwei wichtigsten Gebiete zusammen mit ihren Automorphismengruppen, die als Grundlage für die hyperbolische Ebene dienen sollen, werden sein:
Die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ umrandet von der Einheitskreislinie $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
Die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ umrandet von $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Nach all der Vorbereitung möchten wir nun konkrekt die Automorphismengruppe der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ berechnen und zwar bediene ich mich folgender Idee aus dem Buch [1] "Lie Group Actions in Complex Analysis", Kapitel 2.7 von Dmitri N. Akhiezer: Wir betten die Einheitskreisscheibe in den projektiven Raum $\mathbb{P}^1$ ein und definieren eine quadratische Form q, sodass wir $\mathbb{D} \subset \mathbb{P}^1$ identifizieren können als Menge aller Punkte, für die $q > 0$ gilt. Definieren wir zunächst $\mathbb{P}^1$ und q:

Definition 2.1. Definiere auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ folgende Äquivalenzrelation:

$$x \sim y :\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : y = \lambda x$$

Dann definieren wir den projektiven Raum $\mathbb{P}^1$ als die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation, d.h. $\mathbb{P}^1 := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/ \sim$
Ein Element des projektiven Raums notieren wir in homogenen Koordinaten: $[x_0 : x_1]$ für $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2$, wobei wir ebenfalls einfach $x = [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1$ schreiben und wir haben $[x_0 : x_1] = [\lambda x_0 : \lambda x_1]$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Zunächst können wir mithilfe der folgenden Abbildungen $\mathbb{P}^1$ als die Riemannsche Sphäre identifizieren:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ [x_0 : x_1] &\longmapsto \frac{x_1}{x_0}, \text{ falls } x_0 \neq 0 \\ [0 : x_1] = [0 : 1] &\longmapsto \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi : \hat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ z &\longmapsto [1 : z] \\ \infty &\longmapsto [0 : 1] \end{aligned}$$

Diese sind invers zueinander, denn für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\Phi \circ \Psi(z) = \Phi([1 : z]) = z$ und für alle $x = [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1$ mit $x_0 \neq 0$ gilt:

$$\Psi \circ \Phi(x) = \Psi\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = \left[1 : \frac{x_1}{x_0}\right] = [x_0 : x_1] = x$$

Daher können wir $\mathbb{D}$ in $\mathbb{P}^1$ einbetten: Für $x \in \mathbb{P}^1$ gilt nämlich, dass

$$\Phi(x) = \frac{x_1}{x_0} \in \mathbb{D} \iff 1 - \left|\frac{x_1}{x_0}\right|^2 > 0 \iff |x_0|^2 - |x_1|^2 > 0 \quad (*)$$

Also betrachten wir auf $\mathbb{C}^2$ die folgende hermitsche Form $h(x,y) := \overline{x_0}y_0 - \overline{x_1}y_1$ mit der dazugehörigen quadratischen Form $q(x) := h(x,x) = |x_0|^2 - |x_1|^2$. Beachte, dass für alle $x \in \mathbb{C}^2, \lambda \in \mathbb{C}^*$ gilt: $q(\lambda x) = |\lambda|^2 \cdot q(x)$ und somit $q(\lambda x) > 0 \iff q(x) > 0$, d.h. die Bedingung $q > 0$ gilt für alle Repräsentanten von $x \in \mathbb{P}^1$, wenn sie für einen Repräsentanten gilt. Außerdem haben wir die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{P}^1$ mit $(*)$ identifiziert als

$$\mathbb{D} \cong \{x = [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1 : q((x_0, x_1)) > 0\}$$

und die rechte Menge ist wohldefiniert.

Da $\mathbb{D}$ durch eine quadratische Form q bestimmt wird, können wir uns die Gruppe aller Matrizen anschauen, die q invariant lassen. Sei dazu

$$U(1,1) := \{A \in GL(2,\mathbb{C}) : q(Ax) = q(x)\ \forall x \in \mathbb{C}^2\}$$

Es folgt, dass für alle $A \in U(1,1), x \in \mathbb{C}^2$ gilt: $q(x) > 0 \iff q(Ax) > 0$. Weiterhin erfüllt unsere Äquivalenzrelation für alle $\lambda \in \mathbb{C}^*$, dass $A(\lambda x) = \lambda A x \sim Ax$, wodurch die Abbildung gegeben durch $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, die wir einen linearen Automorphismus von $\mathbb{P}^1$ nennen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ x = [x_0 : x_1] &\longmapsto Ax = [ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1] \end{aligned}$$

wohldefiniert ist. Zum einen haben wir, dass jedes $A \in U(1,1)$ eine Selbstabbildung der Einheitskreisscheibe definiert, da

$$x \in \mathbb{D} \iff q(x) > 0 \iff q(Ax) > 0 \iff Ax \in \mathbb{D}$$

Zum anderen korrespondiert ein linearer Automorphismus in Berücksichtigung von Φ, Ψ und $\mathbb{P}^1 = \{[1 : z] : z \in \mathbb{C}\} \cup \{[0 : 1]\}$ mit der Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto \frac{c + dz}{a + bz} \\ \infty &\longmapsto \frac{d}{b} \end{aligned}$$

welche eine Möbiustransformation, also holomorph, ist. Insgesamt können wir lineare Automorphismen von $\mathbb{P}^1$ gegeben durch $A \in U(1,1)$ und eingeschränkt auf $\mathbb{D}$ als holomorphe Automorphismen von $\mathbb{D}$ auffassen und erhalten einen Gruppenhomomorphismus $\sigma : U(1,1) \to Aut(\mathbb{D})$, dessen Bild wir definieren als $PU(1,1) := Im(\sigma)$.

Für ein geometrisches Bild betrachten wir die üblich definierte stereographische Projektion der Sphäre auf $\mathbb{C}$ mithilfe von Geraden, die durch den Nordpol, ein Punkt der Sphäre und ein Punkt der komplexen Zahlenebene gehen. Dann stellen wir fest, dass die Einheitskreisscheibe auf $\mathbb{C}$ mit der unteren Hälfte der Sphäre identifiziert wird und alle $A \in U(1,1)$ wirken per σ auf die untere Hälfte der Sphäre.

Für den Beweis, dass $Aut(\mathbb{D}) = PU(1,1)$ ist, weiche ich von [1] Akhiezer ab und tue dies, indem ich $U(1,1)$ und den Kern von σ konkreter ausrechne. Gegeben sei die Matrix $J := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dann können wir $h(x,y) = x^* J y$ schreiben, wobei x^* die komplex konjugierte Transponierte von x ist. Da wir in der linearen Algebra gesehen haben, dass wir h auch von q herleiten können, wissen wir, dass A in $U(1,1)$ ist, genau dann, wenn A auch h erhält und

$$h(Ax, Ay) = x^* A^* J A y = x^* J y = h(x,y) \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^2 \iff A^* J A = J$$

Daraus erhalten wir: $U(1,1) = \{A \in GL(2,\mathbb{C}) : A^* J A = J\}$. Wir stellen damit fest, dass für alle Matrizen $A \in U(1,1)$ gilt, dass $|det(A)| = 1$, denn

$$-1 = det(J) = det(A^* J A) = det(A^*) det(J) det(A) = -|det(A)|^2$$

Die allgemeine Form eines solchen A bestimmen wir nun mithilfe von $A^* J A = J$. Sei $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Zum einen gilt

$$A^* J A = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 - |\gamma|^2 & \overline{\alpha}\beta - \overline{\gamma}\delta \\ \alpha\overline{\beta} - \gamma\overline{\delta} & |\beta|^2 - |\delta|^2 \end{pmatrix} = J$$

und zum anderen mit $A^{-1} \in U(1,1)$ auch

$$(A^{-1})^* J A^{-1} = \begin{pmatrix} |\delta|^2 - |\gamma|^2 & \alpha\overline{\gamma} - \beta\overline{\delta} \\ \overline{\alpha}\gamma - \overline{\beta}\delta & |\beta|^2 - |\alpha|^2 \end{pmatrix} = J$$

Der erste Koeffizient gibt uns $|\alpha|^2 - |\gamma|^2 = 1 = |\delta|^2 - |\gamma|^2 \implies |\alpha| = |\delta| \neq 0$.
Zusätzlich mit $\alpha\overline{\beta} - \gamma\overline{\delta} = 0$ folgt: $c = \frac{\alpha\overline{\beta}}{\overline{\delta}} = e^{2i\theta}\overline{\beta}$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$, da $|\alpha| = |\delta|$, woraus auch $|\beta| = |\gamma|$ folgt. Falls $\beta = \gamma = 0$, fallen andere Bedingungen für δ weg und wegen $|\overline{\alpha}| = |\delta|$ können wir $\varphi \in \mathbb{R}$ wählen, sodass $\delta = e^{2i\varphi}\overline{\alpha}$, womit wir $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & e^{2i\varphi}\overline{\alpha} \end{pmatrix}$ erhalten.
Falls $|\beta| = |\gamma| \neq 0$, dann folgt aus $\overline{\alpha}\gamma - \overline{\beta}\delta = 0$, dass $\delta = \frac{\overline{\alpha}\gamma}{\overline{\beta}} = \frac{\overline{\alpha}e^{2i\theta}\overline{\beta}}{\overline{\beta}} = e^{2i\theta}\overline{\alpha}$, womit wir $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ e^{2i\theta}\overline{\beta} & e^{2i\theta}\overline{\alpha} \end{pmatrix}$ erhalten. Dies ist die allgemeinste Form, die wir bekommen können, denn jedes solches A mit $|det(A)| = |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ erfüllt auch $A^* J A = J$ und wir haben bewiesen:

Lemma 2.2. $U(1,1) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ e^{2i\theta}\overline{\beta} & e^{2i\theta}\overline{\alpha} \end{pmatrix} : |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

Beweis. Siehe oben. □

Berechne nun $ker(\sigma : U(1,1) \to Aut(\mathbb{D}))$. Dieser besteht aus allen Matrizen A in $U(1,1)$, sodass $Ax = x$ für alle $x \in \mathbb{D} \subset \mathbb{P}^1$. Nehmen wir die Beschreibung für A aus Lemma 2.2 und nehmen uns die Punkte $x = [1:0]$ und $y = [2:1]$, deren Repräsentanten in $\mathbb{C}^2$ beide $q(x), q(y) > 0$ erfüllen.
Zunächst haben wir $Ax = [\alpha : e^{2i\theta}\overline{\beta}] = [1:0]$, woraus $\beta = 0$ folgt. Dementsprechend ist dann $Ay = [2\alpha : e^{2i\theta}\overline{\alpha}] = [2:1]$ und somit $2 = \frac{2\alpha}{e^{2i\theta}\overline{\alpha}} \iff \alpha = e^{2i\theta}\overline{\alpha}$. Insgesamt haben wir $A = \alpha Id$ mit $det(A) = |\alpha|^2 = 1$. Offensichtlich gibt uns jede Matrix dieser Form, die Identität sogar auf $\mathbb{P}^1$, woraus folgt, dass

$$ker(\sigma) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{2i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{2i\varphi} \end{pmatrix} : \varphi \in \mathbb{R} \right\}$$

Betrachte nun den Quotienten $U(1,1)/ker(\sigma)$:
Eine beliebige Matrix $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ e^{2i\theta}\overline{\beta} & e^{2i\theta}\overline{\alpha} \end{pmatrix} \in U(1,1)$ liegt in der selben Äquivalenzklasse wie $e^{2i\varphi}A$ für beliebiges $\varphi \in \mathbb{R}$. Wählen wir $\varphi := -\frac{\theta}{2}$ erhalten wir:

$$[A] = [e^{-i\theta}A] = \left[\begin{pmatrix} e^{-i\theta}\alpha & e^{-i\theta}\beta \\ e^{i\theta}\overline{\beta} & e^{i\theta}\overline{\alpha} \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \overline{\delta} & \overline{\gamma} \end{pmatrix} \right]$$

wobei $\gamma := e^{-i\theta}\alpha$ und $\delta := e^{-i\theta}\beta$. Die Matrizen dieser Form sind genau die Matrizen aus $U(1,1)$ mit Determinante 1 und bilden somit eine Untergruppe

$$SU(1,1) := \{A \in U(1,1) : det(A) = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in U(1,1) : |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$$

Mithilfe von $SU(1,1)$ bestimmen wir nun $PU(1,1)$:

Lemma 2.3. $PU(1,1) \cong U(1,1)/ker(\sigma) \cong SU(1,1)/\{\pm 1\}$

Beweis. Laut Homomorphiesatz ist $PU(1,1) = Im(\sigma) \cong U(1,1)/ker(\sigma)$ und wir haben die erste Isomorphie. Gerade haben wir gezeigt, dass jede Äquivalenzklasse in $U(1,1)/ker(\sigma)$ einen Repräsentanten in $SU(1,1)$ besitzt und somit ist die Abbildung $\pi : SU(1,1) \to U(1,1)/ker(\sigma), A \mapsto [A]$ surjektiv. Die zweite Isomorphie ist laut Homomorphiesatz bewiesen, wenn wir zeigen, dass $Ker(\pi) = \{\pm Id\}$. Natürlich gilt: $[\pm Id] = [Id]$. Umgekehrt sei $[A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}] = [Id] \in U(1,1)/ker(\sigma)$. Dann existiert ein $\theta \in \mathbb{R}$, sodass $A = e^{2i\theta}Id$ und wir erhalten $\beta = 0$ sowie $\alpha = \overline{\alpha} = e^{2i\theta} \in \mathbb{R} \iff \alpha = \pm 1$, woraus $A = Id$ oder $A = -Id$ folgt.

□

Sei $x = [1 : z] \in \mathbb{P}^1$ und $A = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in SU(1,1)$. Dann haben wir, dass

$$x = [1 : z] \in \mathbb{D} \iff Ax = [\overline{\beta}z + \overline{\alpha} : \alpha z + \beta] \in \mathbb{D}$$

Zurück übersetzt nach $\hat{\mathbb{C}}$ mit der Abbildung Φ bedeutet das, dass $(**)$

$$z \in \mathbb{D} \iff \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta}z + \overline{\alpha}} \in \mathbb{D}$$

Der folgende Satz sagt uns, dass alle Automorphismen von $\mathbb{D}$ von dieser Form sind:

Satz 2.4. $Aut(\mathbb{D}) = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{D} : f(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta}z+\overline{\alpha}}, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\} \cong PU(1,1)$

Beweis. Die Äquivalenz $(**)$ zeigt, dass die Möbiustransformation φ_A definiert durch $A \in SU(1,1)$ und eingeschränkt auf $\mathbb{D}$ ein Automorphismus von $\mathbb{D}$ ist. Für beliebige $z_0 \in \mathbb{D}$ benutzen wir Hilfsfunktionen $g_{z_0} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ gegeben durch

$$g_{z_0}(z) = \frac{\gamma z + \delta}{\overline{\delta}z + \overline{\gamma}}, \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - |z_0|^2}}, \delta := \frac{-z_0}{\sqrt{1 - |z_0|^2}}$$

Dann gilt $g_{z_0}(z_0) = 0$ und $|\gamma|^2 - |\delta|^2 = 1$, also ist tatsächlich $g_{z_0} \in Aut(\mathbb{D})$. Sei nun $f \in Aut(\mathbb{D})$: Die einzige Nullstelle von f nennen wir z_0 und die Funktion $h := f \circ g_{z_0}^{-1}$ erfüllt $h(0) = 0$ und ist ebenfalls ein Automorphismus der Einheitskreisscheibe. Das Schwarzsche Lemma sagt uns nun, dass h eine Drehung sein muss, d.h. $\exists \theta \in \mathbb{R}$ mit $h(z) = e^{2i\theta}z$. Dann ist aber

$$f(z) = h(g_{z_0}(z)) = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} \frac{\gamma z + \delta}{\overline{\delta}z + \overline{\gamma}} = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta}z + \overline{\alpha}}$$

wobei $\alpha := e^{i\theta}\gamma, \beta := e^{i\theta}\delta$. Ebenfalls ist $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$, womit wir gezeigt haben, dass jedes f gegeben ist durch eine Matrix in $SU(1,1)$. Zwei Matrizen $A, B \in SU(1,1)$ definieren genau dann den selben Automorphismus wenn $AB^{-1} = \lambda Id \in SU(1,1)$ genau dann wenn $\lambda = \pm 1$, womit die Isomorphie zu $PU(1,1)$ bewiesen ist. □

Korollar 2.5. $Aut(\mathbb{D}) = \text{Möb}(\mathbb{D})$

Beweis. Der vorherige Satz zeigt, dass jeder Automorphismus der Einheitskreisscheibe gegeben ist, durch eine Möbiustransformation, die $\mathbb{D}$ festhält. □

Zum Schluss des Kapitels berechnen wir die Automorphismengruppe der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ mithilfe von $Aut(\mathbb{D})$. Angenommen wir haben eine biholomorphe Abbildung $g : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ gegeben. Dann ist die Konjugation mit g ein Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} K_g : Aut(\mathbb{D}) &\longrightarrow Aut(\mathbb{H}) \\ f &\longmapsto g^{-1} \circ f \circ g \end{aligned}$$

denn die Umkehrabbildung erhalten wir nämlich durch die Konjugation mit g^{-1}. Definieren wir g sogar als Möbiustransformation, dann ist auch $K_g(f) \in$ Möb($\mathbb{H}$) für jedes $f \in Aut(\mathbb{D}) =$ Möb($\mathbb{D}$) und es folgt $Aut(\mathbb{H}) =$ Möb($\mathbb{H}$).

Um solch ein $g \in$ Möb($\hat{\mathbb{C}}$) zu finden, machen wir uns Kreise und von Kreisen umrandete Gebiete zunutze. Sei g gegeben durch $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$. Dann behaupte ich, dass $g(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Da Kreise eindeutig durch 3 Punkte gegeben sind und Möbiustransformationen Kreise auf Kreise abbilden, müssen wir es nur für ein Tripel überprüfen, z.B. $g(0) = -1$, $g(1) = -i$, $g(\infty) = 1 \in S^1$. Um zu zeigen, dass $g(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$ gilt, nutzen wir, dass Möbiustransformationen von Kreisen umrandete Gebiete auf umrandete Gebiete abbilden. Da $\mathbb{H}$ von $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $\mathbb{D}$ von S^1 umrandet wird, reicht es dies für einen einzigen Punkt aus $\mathbb{H}$ zu überprüfen, z.B. $g(i) = 0 \in \mathbb{D}$. Somit haben wir unser g gefunden und $g^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ ist gegeben durch $g^{-1}(w) = i\frac{1+w}{1-w}$.

Satz 2.6. $Aut(\mathbb{H}) =$ Möb($\mathbb{H}$) $\cong PSL(2, \mathbb{R}) := SL(2, \mathbb{R})/\{\pm 1\}$

Beweis. Von oben nutzen wir die Beschreibung $Aut(\mathbb{H}) = \{g^{-1} \circ f \circ g : f \in Aut(\mathbb{D})\}$ sowie den Gruppenhomomorphismus von Lemma 1.2, um alles in Matrixschreibweise zu betrachten. Ein beliebiges $f \in Aut(\mathbb{D})$ ist nach Satz 2.4 gegeben durch eine Matrix $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ mit $det(A) = 1$. Die Matrizen für g und g^{-1} wollen wir ebenfalls durch Matrizen mit Determinante 1 angeben und müssen dementsprechend die Koeffizienten von g, g^{-1} durch eine Wurzel von $2i$ teilen beziehungsweise mit $\frac{1-i}{2}$ multiplizieren. Dann ist g gegeben durch die Matrix $B = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & -\frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$ und g^{-1} durch $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ -\frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$ und wir bekommen

$$Aut(\mathbb{H}) \cong \{B^{-1}[A]B : [A] \in PU(1,1)\} \cong \{B^{-1}AB : A \in SU(1,1)\}/\{\pm 1\}$$

wobei letztere Isomorphie folgt, da $B^{-1}[A]B = B^{-1}[D]B$ für $A, D \in SU(1,1)$ genau dann gilt, wenn $A = \pm D$. Zu zeigen ist also, dass letztere Menge gleich $PSL(2, \mathbb{R})$ ist: Sei $A \in SU(1,1)$ beliebig und wir berechnen

$$B^{-1}AB = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha + \beta & i(\beta - \alpha) \\ \overline{\alpha} + \overline{\beta} & i(\overline{\alpha} - \overline{\beta}) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i(\alpha + \beta + \overline{\alpha} + \overline{\beta}) & (\alpha - \beta) - (\overline{\alpha} - \overline{\beta})) \\ (\overline{\alpha} + \overline{\beta}) - (\alpha + \beta) & i(\overline{\alpha} - \overline{\beta} + \alpha - \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re(\alpha + \beta) & Im(\alpha - \beta) \\ -Im(\alpha + \beta) & Re(\alpha - \beta) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $ad - bc = det(B^{-1}AB) = det(A) = 1$. Somit ist $B^{-1}AB \in SL(2, \mathbb{R})$.
Umgekehrt können wir für jedes $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ folgende

$$\alpha := \frac{1}{2}((a + d) + i(b - c)), \beta := \frac{1}{2}((a - d) - i(b + c)) \in \mathbb{C}$$

definieren. Zum einen gilt

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = \frac{1}{4}((a+d)^2 + (b-c)^2 - (a-d)^2 - (b+c)^2) = ad - bc = 1$$

Zum anderen haben wir mit der selben Rechnung wie oben $A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$ gefunden, sodass $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} Re(\alpha+\beta) & Im(\alpha-\beta) \\ -Im(\alpha+\beta) & Re(\alpha-\beta) \end{pmatrix} = C$. □

Zum Schluss des Kapitels und für später geben wir die Erzeuger von $Aut(\mathbb{H})$ an:

Lemma 2.7. $Aut(\mathbb{H}) = < M_a(z) = az, T_b(z) = z + b, J(z) = -\frac{1}{z} >$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$.

Beweis. Zu allererst sind alle M_a, T_b und J in $Aut(\mathbb{H})$, denn diese sind gegeben durch Matrizen $\begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, die nach Satz 2.6 Automorphismen der oberen Halbebene definieren. Nehmen wir uns nun ein allgemeines $f \in Aut(\mathbb{H})$. Dann gilt:

$$T_{\frac{a}{c}} \circ J \circ T_{cd} \circ M_{c^2}(z) = -\frac{1}{c^2 z + cd} + \frac{a}{c} = \frac{acz + (ad-1)}{c^2 z + cd} \underbrace{=}_{ad-1=bc} \frac{acz + bc}{c^2 z + cd} = \frac{az+b}{cz+d} = f(z)$$

und unser Lemma ist bewiesen. □

3 Riemannsche Metriken

Wir wollen nun geometrische Modelle entwickeln, sodass aus Automorphismen abstandserhaltende Abbildungen werden. Dazu definieren wir den Begriff der Riemannschen Metrik, die uns für jeden Punkt eines Gebiets $U \subset \mathbb{C}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}$ definiert, sowie von der Metrik induzierte Längen von Wegen und Abständen von Punkten. Geometrische Modelle werden dann durch Angabe einer Riemannschen Metrik definiert. In den nächsten Kapiteln konstruieren wir diese konkret, sodass Automorphismen die induzierten Längen und Abstände erhalten. Die daraus resultierenden Modelle für $\mathbb{H}$ und $\mathbb{D}$ nennen wir beide die hyperbolische Ebene.

In diesem Kapitel übernehmen wir die nachfolgenden Definitionen und Eigenschaften von Riemannschen Metriken im Wesentlichen aus [3] ”Curved Spaces: From Classical Geometries to Elementary Differential Geometry”, Kapitel 4 von P.M.H. Wilson. Im Folgenden identifizieren wir wie üblich $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, in Koordinaten (x, y) und $z = x + iy$ für einen Punkt P in einem Gebiet U von $\mathbb{C}$.

Definition 3.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Eine Riemannsche Metrik wird definiert durch glatte Funktionen $E, F, G : U \to \mathbb{R}$ auf U, sodass für alle Punkte $P \in U$ gilt, dass $<,>_P$ ein Skalarprodukt ist, sodass

$$< v, w >_P = v^T \begin{pmatrix} E(P) & F(P) \\ F(P) & G(P) \end{pmatrix} w \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^2$$

Die Riemannsche Metrik gibt uns also eine Familie von Skalarprodukten auf $\mathbb{R}^2$ und wir können diese kürzer notieren als $\Phi := Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$, wobei dx^2, $dxdy$, $dy^2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Bilinearformen sind, gegeben durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel. Sei $U = \mathbb{R}^2$ und $E = G = 1, F = 0$, also die Riemannsche Metrik $\Phi = dx^2 + dy^2$ gegeben. Dann ist für jedes $P \in \mathbb{R}^2$ das gleiche Skalarprodukt gegeben und es gilt: $< v, w >_P = v^T w = v_1 w_1 + v_2 w_2$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$. Dies ist das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ und damit gibt uns $dx^2 + dy^2$ die euklidische Geometrie auf $\mathbb{R}^2$.
Betrachten wir U als Teilmenge von $\mathbb{C}$, schreiben wir auch $|dz|^2 := dx^2 + dy^2$ und haben dann für alle komplexe Zahlen ζ_1, ζ_2, dass $< \zeta_1, \zeta_2 >_P = Re(\zeta_1)Re(\zeta_2) + Im(\zeta_1)Im(\zeta_2) = Re(\overline{\zeta_1}\zeta_2)$.

Da wir nun eine Familie von Skalarprodukten gegeben haben, erhalten wir somit auch eine Familie von Normen $|| \cdot ||_P$, die für jeden Punkt P wie üblich durch $||v||_P :=< v, v >_P^{\frac{1}{2}}$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist. Bemerke, dass die euklidische Länge eines Weges gegeben ist als Integral der Norm der Ableitung und analog wollen wir so die Länge eines Weges bezüglich einer Riemannschen Metrik Φ definieren.

Definition 3.2. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\Phi = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$ eine Riemannsche Metrik auf U, sowie $\gamma : [a, b] \to U$ ein punktweise stetig differenzierbarer Weg von $x = \gamma(a)$ nach $y = \gamma(b)$. Dann ist die Länge von γ bezüglich Φ gegeben als:

$$L_\Phi(\gamma) := \int_a^b ||\gamma'||dt := \int_a^b ||\gamma'(t)||_{\gamma(t)}dt \ \geq 0$$

wobei ausgeschrieben mit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ gilt:

$$||\gamma'(t)||_{\gamma(t)} = [E(\gamma(t))\gamma_1'(t) + 2F(\gamma(t))\gamma_1'(t)\gamma_2'(t) + G(\gamma(t))\gamma_2'(t)]^{\frac{1}{2}}$$

Für $P, Q \in U$ schreiben wir

$$W(P, Q) := \{\gamma : [a, b] \to U : \gamma \text{ punktweise stetig differenzierbar}, \gamma(a) = P,\ \gamma(b) = Q\}$$

Diese Menge ist nichtleer für Gebiete, da wir immer einen Streckenzug zwischen zwei Punkten in Gebieten angeben können. Außerdem nimmt $||\gamma'||$ als stetige Funktion in $[a, b]$ sein Maximum M an und $L_\Phi(\gamma)$ ist nach oben beschränkt durch $M(b - a)$ und somit endlich. Dies nutzen wir, um eine Metrik auf U zu definieren:

Lemma 3.3. Sei $U \in \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Dann definiert die Funktion $d_\Phi : U \times U \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben durch $d_\Phi(P, Q) := \inf\{L_\Phi(\gamma) : \gamma \in W(P, Q)\}$ eine Metrik.

Beweis. Seien $P, Q, R \in U$. Es gilt:
(1) $d_\Phi(P, P) = 0$, wähle $\gamma \equiv P$ und $||\gamma'|| = 0$.
(2) $d_\Phi(P, Q) = d_\Phi(Q, P)$, denn jeder Weg $\gamma : [a, b] \to U$ von $\gamma(a) = P$ nach $\gamma(b) = Q$ gibt uns einen gleich langen Weg $(*)$ $\beta : [a, b] \to U$ mit $\beta(t) := \gamma(a + b - t)$ von $\beta(a) = Q$ nach $\beta(b) = P$. Somit sind die Infima aller Längen von Wegen in $W(x, y)$ und $W(y, x)$ gleich. Benutze die Substitution $s := a+b-t, s'(t) = -1$ und berechne

$$(*)\ L_\Phi(\beta) = \int_a^b ||\beta'(t)||dt = -\int_b^a || - \gamma'(a + b - t)||dt = \int_a^b || - \gamma'(s)||ds = L_\Phi(\gamma)$$

(3) $d_\Phi(P, R) \leq d_\Phi(P, Q) + d_\Phi(Q, R)$, denn alle Wege γ von P nach Q und β von Q nach R können hintereinanderausgeführt werden und wir erhalten einen Weg $\gamma+\beta \in W(P, R)$, dessen Länge die Summe der einzelnen Längen ist. Nach Definition von d_Φ finden wir für alle $\epsilon > 0$ ein $\gamma \in W(P, Q)$ und ein $\beta \in W(Q, R)$, sodass $L_\Phi(\gamma) = d_\Phi(P, Q) + \epsilon$, $L_\Phi(\beta) = d_\Phi(Q, R) + \epsilon$. Wir erhalten

$$d_\Phi(P, R) \leq L_\Phi(\gamma + \beta) = L_\Phi(\gamma) + L_\Phi(\beta) = d_\Phi(P, Q) + d_\Phi(Q, R) + 2\epsilon$$

und damit auch die Dreiecksungleichung, da $\epsilon > 0$ beliebig war.
(4) $d_\Phi(P, Q) = 0 \implies P = Q$: Diese Eigenschaft gilt im Allgemeinen, aber wir zeigen dies später nur für unsere konkreten Modelle der hyperbolischen Ebene. $\square$

Die Riemannschen Metriken geben uns also geometrische Modelle auf Gebieten $U \subset \mathbb{C}$ mit zugehörigem Längen- und Abstandsbegriff. Da wir unterschiedliche Gebiete als Menge von Punkten für die hyperbolische Ebene betrachten wollen, brauchen wir sogenannte Isometrien von Riemannschen Metriken, mit denen wir bestimmen können, wann überhaupt Metriken auf verschiedenen Gebieten geometrisch gleichwertige Modelle definieren. Dieser Begriff hilft uns am Ende auch Metriken zu konstruieren, sodass nach Konstruktion aus bereits vorhandenen Abbildungen zwischen Gebieten, wie im letzten Kapitel zur Bestimmung von Automorphismen, Isometrien von Riemannschen Metriken werden. Dazu:

Definition 3.4. Gegeben sei ein Diffeomorphismus $f : U \to U^*$ zwischen zwei Gebieten $U, U^* \subset \mathbb{R}^2$, sowie Riemannsche Metriken Φ auf U und Φ^* auf U^*, die uns Skalarprodukte $<,>_P$ und $<,>_Q^*$ für alle $P \in U$, $Q \in U^*$ geben. Dann nennen wir f eine Isometrie von Riemannschen Metriken, falls für alle $P \in U$ gilt:

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^2 : < v, w >_P = < df_P(v), df_P(w) >_{f(P)}^*$$

wobei $df_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die totale Ableitung von f in P ist.
Wir schreiben $(U, \Phi) \cong (U^*, \Phi^*)$, falls eine Isometrie wie oben existiert.

Bemerkung. (1) Natürlich folgt dann auch $||v||_P = ||df_P(v)||_{f(P)}^*$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$.
(2) Die Umkehrabbildung $f^{-1} : U^* \to U$ ist ebenso eine Isometrie von Riemannschen Metriken, denn f^{-1} ist auch ein Diffeomorphismus, womit für alle $Q = f(P) \in U^*$ gilt, dass $df_P \circ df_Q^{-1} = id|_{\mathbb{R}^2}$ und wir nutzen, dass f Isometrie ist. Insgesamt haben wir für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$< v, w >_Q^* = < df_P(df_Q^{-1}(v)), df_P(df_Q^{-1}(w)) >_{f(P)}^* = < df_Q^{-1}(v), df_Q^{-1}(w) >_P$$

(3) Ebenfalls gilt dies für Verknüpfungen $g \circ f$, was sofort aus $d(g \circ f)_P = dg_{f(P)} \circ df_P$ und Anwendung der Isometrieeigenschaft für g und f folgt.
(4) Ist f sogar biholomorph und betrachten wir alles in $\mathbb{C}$, dann ist die totale Ableitung $df_P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $df_P(\zeta) = f'(P)\zeta$ und obige Bedingung für eine Isometrie kann umschrieben werden als $< \zeta_1, \zeta_2 >_P = < f'(P)\zeta_1, f'(P)\zeta_2 >_{f(P)}^*$ für alle $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$.

Lemma 3.5. Definiert f eine Isometrie von Riemannschen Metriken $(U, \Phi) \cong (U^*, \Phi^*)$, dann erhält f auch Längen und Abstände, d.h. für alle punktweise stetig differenzierbaren Wege $\gamma : [a, b] \to U$ gilt: $L_{\Phi^*}(f \circ \gamma) = L_\Phi(\gamma)$ und für alle $P, Q \in U$ gilt: $d_{\Phi^*}(f(P), f(Q)) = d_\Phi(P, Q)$.

Beweis. Beachte, dass $f \circ \gamma : [a, b] \to U^*$ ebenfalls punktweise stetig differenzierbar ist, da f stetig differenzierbar ist. Zunächst gilt:

$$L_{\Phi^*}(f \circ \gamma) = \int_a^b ||(f \circ \gamma)'(t)||_{f(\gamma(t))}^* dt = \int_a^b ||df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))||_{f(\gamma(t))}^* dt = \int_a^b ||\gamma'(t)||_{\gamma(t)} dt = L_\Phi(\gamma)$$

Seien Punkte $P, Q \in U$ gegeben. Für jeden Weg γ von P nach Q ist $f \circ \gamma$ ein Weg von $f(P)$ nach $f(Q)$ gleicher Länge und wir erhalten nach Definition der Abstände $d_\Phi(P,Q) \geq d_{\Phi^*}(f(P), f(Q))$, da eventuell weitere Wege von $f(P)$ nach $f(Q)$ kürzerer Länge existieren könnten. Allerdings können wir analog mit f^{-1} als Isometrie sowie Wegen γ von $f(P)$ nach $f(Q)$ und $f^{-1} \circ \gamma$ von P nach Q zeigen, dass $d_\Phi(P,Q) \leq d_{\Phi^*}(f(P), f(Q)$, was das Lemma beweist. □

Für die nächste Definition setzen wir unsere zwei Gebiete gleich, d.h. $U = U^*$, denn so können wir Isometriegruppen von U, d.h. die Gruppe der abstandserhaltenden Abbildungen $f : U \to U$ definieren und zusätzlich zeigen, dass eine Isometrie von (U, Φ) auf sich selbst ebenfalls in der Isometriegruppe von U ist.

Definition 3.6. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit Riemannscher Metrik Φ und d_Φ die induzierte Metrik. Dann definieren wir die Isometriegruppe von U als

$$Iso(U) := \{f : U \to U : d_\Phi(f(P), f(Q)) = d_\Phi(P,Q) \ \forall P, Q \in U\}$$

Bemerkung. (1) $Iso(U)$ ist tatsächlich eine Gruppe, denn für alle $P, Q \in U$ gilt:
(a) $id \in Iso(U)$ ist offensichtlich erfüllt.
(b) Für alle $f, g \in Iso(U)$ gilt: $g \circ f \in Iso(U)$, denn

$$d_\Phi(g(f(P)), g(f(Q))) = d_\Phi(f(P), f(Q)) = d_\Phi(P,Q)$$

(c) Für alle $f \in Iso(U)$ gilt: $f^{-1} \in Iso(U)$, denn

$$d_\Phi(f^{-1}(P), f^{-1}(Q)) = d_\Phi(f(f^{-1}(P)), f(f^{-1}(Q))) = d_\Phi(P,Q)$$

(2) Definiert $f : U \to U$ eine Isometrie von der Riemannschen Metrik (U, Φ), dann ist $f \in Iso(U)$ nach Lemma 3.5.

Da wir verschiedene Isometriegruppen wie die von $\mathbb{H}$ und $\mathbb{D}$ ausrechnen möchten und dies nicht jedes Mal von Grund auf bestimmen wollen und müssen, können wir stattdessen die Konjugation wie bereits zur Bestimmung von Automorphismengruppen nutzen und beenden das Kapitel mit folgendem Lemma:

Lemma 3.7. Seien $(U, \Phi) \cong (U^*, \Phi^*)$ und $g : U \to U^*$ eine Isometrie dieser Riemannschen Metriken, dann gibt uns die Konjugation mit g einen Gruppenisomorphismus zwischen den Isometriegruppen:

$$\begin{aligned} K_g : Iso(U^*) &\longrightarrow Iso(U) \\ f &\longmapsto g^{-1} \circ f \circ g \end{aligned}$$

Beweis. Wir müssen nur zeigen, dass K_g wohldefiniert ist, d.h. $g^{-1} \circ f \circ g$ ist tatsächlich in $Iso(U)$, denn wir wissen bereits, dass K_g ein Gruppenisomorphismus ist. Seien d_Φ, d_{Φ^*} die induzierten Metriken. Nach Lemma 3.5. respektieren g, g^{-1} die Abstände der jeweiligen Metriken. Dann gilt für alle $x, y \in U$ und alle $f \in Iso(U^*)$:

$$d_\Phi(g^{-1}(f(g(P)))), g^{-1}(f(g(Q)))) = d_{\Phi^*}(f(g(P)), f(g(Q))) = d_{\Phi^*}(g(P), g(Q)) = d_\Phi(P,Q)$$

womit $g^{-1} \circ f \circ g \in Iso(U)$ gezeigt ist. □

4 Die obere Halbebene $\mathbb{H}$ als Modell der hyperbolischen Ebene und ihre Isometriengruppe

Wie bereits im letzten Kapitel erwähnt, wollen wir die hyperbolische Ebene durch Angabe einer Riemannschen Metrik definieren. Für unser erstes Modell nehmen wir die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ als die Menge unserer Punkte. Diese ist ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und wir erhalten nach Angabe der Metrik einen Längen- und Abstandsbegriff wie im letzten Kapitel beschrieben. Die Riemannsche Metrik $\Phi_{\mathbb{H}}$ konstruieren wir so, dass alle Elemente $f \in Aut(\mathbb{H})$ Isometrien von $(\mathbb{H}, \Phi_{\mathbb{H}})$ auf sich selbst definieren. Nach Lemma 3.5 ist garantiert, dass dann Automorphismen f Längen und Abstände bezüglich $\Phi_{\mathbb{H}}$ erhalten, womit wir erreichen, dass $Aut(\mathbb{H}) \subset Iso(\mathbb{H})$ gilt. Die hyperbolische Ebene wird dann durch $(\mathbb{H}, \Phi_{\mathbb{H}})$ gegeben sein.

Konstruieren wir nun $\Phi_{\mathbb{H}}$: Wir wollen so einfach wie möglich ansetzen und fangen mit dem Standardskalarprodukt $|dz|^2 = dx^2 + dy^2$ auf $\mathbb{H}$ an. Jedoch skalieren $(z \mapsto az, a > 0) \in Aut(\mathbb{H})$ Längen und Abstände um genau den Faktor a und erhalten sie nicht für $a \neq 1$, was unter anderem zeigt, dass die euklidische Geometrie nicht in Betracht kommt und diese nicht mit der hyperbolischen übereinstimmt.

Da eine konstante Skalierung von $|dz|^2$ zum selben Entschluss führt, ist der nächstgelegene Ansatz für jedes $z \in \mathbb{H}$ eine eigene Skalierung des Standardskalarprodukts anzugeben. Dementsprechend setzen wir mit $s(z)|dz|^2$ an, wobei $s : \mathbb{H} \to \mathbb{R}_{>0}$ die Skalierung sein soll. Für jedes $z \in \mathbb{H}$ erhalten wir ein Skalarprodukt $<,>_z$ auf $\mathbb{C}$, sodass für alle $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$< \zeta_1, \zeta_2 >_z = s(z) Re(\overline{\zeta_1}\zeta_2)$$

Bemerke, dass $<,>_z$ dann und nur dann positiv definit ist, wenn $s(z) > 0$, was erklärt warum wir nur positive Werte zulassen.

Dies soll uns nun zum Ziel bringen: Alle $f \in Aut(\mathbb{H})$ sollen eine Isometrie von $(\mathbb{H}, s(z)|dz|^2)$ auf sich selbst definieren. Ausgeschrieben bedeutet dies nach Definition 3.4 und wegen f biholomorph, dass für alle $z \in \mathbb{H}$ gilt:

$$\forall \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C} : \quad < \zeta_1, \zeta_2 >_z = < f'(z)\zeta_1, f'(z)\zeta_2 >_{f(z)}$$

was äquivalent ist zu:

$$\forall \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C} : \quad s(z) Re(\overline{\zeta_1}\zeta_2) = s(f(z)) Re(\overline{f'(z)\zeta_1} f'(z)\zeta_2) = s(f(z))|f'(z)|^2 Re(\overline{\zeta_1}\zeta_2)$$

Dies ist genau dann der Fall (wähle z.B. $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$), wenn für alle $z \in \mathbb{H}$ erfüllt ist:

$$s(z) = s(f(z))|f'(z)|^2$$

Wir haben bereits bemerkt, dass Verknüpfungen von Isometrien von Riemannschen Metriken selbst wieder welche sind und somit reicht es ein s zu finden, sodass die Gleichung $s = (s \circ f)|f'|^2$ für alle Erzeuger aus $Aut(\mathbb{H})$ gilt.

Sei $T_b(z) = z + b$ für $b \in \mathbb{R}$ der erste Typ von Erzeugern. Wir verlangen also von s, dass

$$s(z) = (s \circ T_b)(z)|T_b'(z)|^2 = (s \circ T_b)(z) = s(z+b)$$

für alle $z \in \mathbb{H}$ gilt. Für jedes z können wir vor allem $b = -Re(z)$ wählen und es gilt $s(z) = s(z - Re(z)) = s(Im(z))$, womit s nur vom Imaginärteil abhängt.

Nehmen wir nun $M_a(z) = az$ für $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann soll für s und alle $z \in \mathbb{H}$ gelten:

$$s(z) = (s \circ M_a)(z)|M_a'(z)|^2 = a^2 \cdot s(az) = a^2 \cdot s(Im(az)) = a^2 \cdot s(a \cdot Im(z))$$

Für festes z wählen wir $a := \frac{1}{Im(z)} > 0$ und vorherige Gleichungskette gibt uns dann

$$s(z) = \frac{1}{Im(z)^2}\, s\left(\frac{1}{Im(z)} Im(z)\right) = \frac{s(1)}{Im(z)^2} = \frac{c}{Im(z)^2}$$

für $c := s(1) > 0$.

Unser letzter Erzeuger ist $J(z) = -\frac{1}{z}$. Es stellt sich heraus, dass J unser s in der jetzigen Form respektiert, denn es gilt:

$$J'(z) = \frac{1}{z^2} \quad \text{und} \quad Im(J(z)) = Im\left(-\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = \frac{Im(-\overline{z})}{|z|^2} = \frac{Im(z)}{|z|^2}$$

und somit

$$s(J(z))|J'(z)|^2 = \frac{c|z|^4}{Im(z)^2} \frac{1}{|z|^4} = \frac{c}{Im(z)^2} = s(z)$$

Somit gilt für alle $c > 0$, dass alle $f \in Aut(\mathbb{H})$ Isometrien der Riemannschen Metrik $\left(\mathbb{H}, \frac{c|dz|^2}{Im(z)^2}\right)$ auf sich selbst definieren. Wir wählen $c = 1$ und definieren:

Definition 4.1. Die hyperbolische Ebene auf $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ ist gegeben durch die Riemannsche Metrik

$$\Phi_{\mathbb{H}} = \frac{|dz|^2}{Im(z)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Für jeden punktweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{H}$ ist die hyperbolische Länge $L_{\mathbb{H}}$ von γ:

$$L_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{Im(\gamma(t))} dt$$

Der hyperbolische Abstand $d_{\mathbb{H}}$ von x und y ist:

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = \inf\{L_{\mathbb{H}}(\gamma) : \gamma \in W(x, y)\}$$

Bemerkung. Die hyperbolische Länge und der hyperbolische Abstand sind genau die von $\Phi_{\mathbb{H}}$ induzierte Länge und Abstand. Vor allem sind $L_{\mathbb{H}}(\gamma)$ und $d_{\mathbb{H}}(x,y)$ endlich. Nach Lemma 3.5 erfüllen somit alle Automorphismen $f \in Aut(\mathbb{H})$, alle $x, y \in \mathbb{H}$ und alle $\gamma \in W(x,y)$, dass $L_{\mathbb{H}}(f \circ \gamma) = L_{\mathbb{H}}(\gamma)$ und $d_{\mathbb{H}}(x,y) = d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y))$.

Beispiel. Der hyperbolische Abstand $d_{\mathbb{H}}(ai, bi)$ zweier imaginärer Zahlen mit $0 < a \leq b$ ist gegeben durch die hyperbolische Länge der euklidischen Strecke von ai nach bi. Parametrisiere die Strecke durch $\gamma_0 : [a,b] \to \mathbb{H}$, $\gamma_0(t) = it$. Es ist zu zeigen, dass $d_{\mathbb{H}}(ai, bi) = L_{\mathbb{H}}(\gamma_0)$. Wir haben:

$$L_{\mathbb{H}}(\gamma_0) = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \ln(b) - \ln(a)$$

Sei nun $\gamma : [c,d] \to \mathbb{H}$ mit $\gamma(c) = ai$, $\gamma(d) = bi$ aus $W(ai, bi)$ beliebig.
Sei $\beta := Im(\gamma) : [c,d] \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $\beta(c) = a$, $\beta(d) = b$. Dann gilt für alle $t \in [c,d]$:

$$|\gamma'(t)| = (([Re(\gamma)]'(t))^2 + \beta'(t)^2)^{\frac{1}{2}} \geq ((\beta'(t))^2)^{\frac{1}{2}} = |\beta'(t)|$$

und wir erhalten mit $|\beta| = \beta > 0$ und der Substitution $u = \beta(t)$:

$$L_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_c^d \frac{|\gamma'(t)|}{\beta(t)} dt \geq \int_c^d \frac{|\beta'(t)|}{\beta(t)} dt = \int_c^d \left|\frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right| dt \geq \left|\int_c^d \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} dt\right| = \left|\int_a^b \frac{1}{u} du\right| = L_{\mathbb{H}}(\gamma_0)$$

Somit ist die Länge von γ_0 das Minimum aller Längen von Wegen von ai nach bi und es gilt: $d_{\mathbb{H}}(ai, bi) = L_{\mathbb{H}}(\gamma_0) = \ln(b) - \ln(a)$.

Jetzt wo wir gesehen haben, dass der hyperbolische Abstand zweier imaginärer Zahlen durch die euklidische Strecke gegeben ist, können wir versuchen für alle $x, y \in \mathbb{H}$ einen Weg zu finden, der den Abstand von x und y realisiert. Dazu würde es reichen ein $f \in Aut(\mathbb{H})$ anzugeben, das x und y auf die positive imaginäre Achse abbildet, denn sei γ die Parametrisierung der euklidischen Strecke von $f(x)$ nach $f(y)$. Da f und f^{-1} Isometrien sind, gilt:

$$d_{\mathbb{H}}(x,y) = d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y)) = L_{\mathbb{H}}(\gamma) = L_{\mathbb{H}}(f^{-1} \circ \gamma)$$

und wir haben unseren Weg $f^{-1} \circ \gamma \in W(x,y)$ gefunden. Diesen würden wir als hyperbolische Strecke von x nach y auffassen wollen, denn dann ist die Länge der Strecke zweier Punkte genau der Abstand der Punkte zueinander. Für $x = ai$ und $y = bi$ könnten wir also die hyperbolische Strecke gleich der euklidischen definieren. Da die Strecken für jedes solcher Paare Teilmengen der positiven imaginären Achse

$$I^+ := \{z \in \mathbb{H} : Re(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} : z + \overline{z} = 0\} \cap \mathbb{H}$$

sind, wäre I^+ ein Kandidat für unsere erste hyperbolische Gerade. Weitere hyperbolischen Geraden könnten wir jetzt als Bilder von I^+ unter Automorphismen definieren, jedoch können wir deren Gestalt genauer bestimmen. Bemerke, dass I^+ Schnitt eines Kreises in $\hat{\mathbb{C}}$ mit $\mathbb{H}$ und f eine Möbiustransformation ist, die $\mathbb{H}$ festhält. Somit ist jedes $f(I^+)$ für $f \in Aut(\mathbb{H})$ ein Kreis geschnitten mit der oberen Halbebene. Für die Betrachtung welche Teilmengen von $\mathbb{H}$ sich als hyperbolische Geraden eignen, reicht es die Erzeuger von $Aut(\mathbb{H})$ zu betrachten.

Für $T_b(z) = z+b, b \in \mathbb{R}$ ist $T_b(I^+) = \{z \in \mathbb{H} : Re(z) = b\}$ und da b beliebig ist, erhalten wir somit alle zur reellen Achse senkrechten euklidischen Geraden geschnitten mit der oberen Halbebene. Die $M_a(z) = az, a > 0$ geben uns erst einmal keine neuen Typen von Geraden, da einfach nur die Realteile mit a multipliziert werden. Schreibe also $G = \{z \in \mathbb{H} : z + \overline{z} + c = 0\}$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$. Für $w := J(z) = -\frac{1}{z}$ können wir ähnlich wie in Lemma 1.6. die Kreisgleichung mit $w\overline{w}$ multiplizieren und erhalten $J(G) = \{w \in \mathbb{H} : cw\overline{w} - w - \overline{w} = 0\}$, wobei wir für $c = 0$ eine Selbstabbildung von I^+ haben, während für $c \neq 0$, $J(G)$ ein echter Kreis mit Mittelpunkt $\frac{1}{c}$ auf der reellen Achse ist. Mit unseren T_b können wir beliebige Mittelpunkte auf der reellen Achse und mit M_a beliebige Radien der Kreise realisieren. Betrachten wir also K gegeben durch die Kreisgleichung $az\overline{z} + \beta z + \overline{\beta z} + c = 0$. Der Mittelpunkt ist gegeben durch $-\frac{\overline{\beta}}{a}$ und da wir nur reelle Mittelpunkte haben, muss also $\beta = \overline{\beta} \in \mathbb{R}$ gelten. Zuletzt gilt, dass $J(K) = \{w \in \mathbb{H} : cw\overline{w} - \beta w - \beta\overline{w} + a = 0\}$, was kein neuer Typ von potentiellen hyperbolischen Geraden ist. All dies zusammengefasst führt zur folgenden Definition:

Definition 4.2. Eine Menge $G \subset \mathbb{H}$ heißt hyperbolische Gerade, wenn gilt, dass:

$$G = \{z \in \mathbb{H} : az\overline{z} + bz + b\overline{z} + c = 0\}$$

für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $b^2 > ac$ oder anders formuliert:
(a) $G = G' \cap \mathbb{H}$ für eine euklidische Gerade $G' \subset \mathbb{C}$ senkrecht zur reellen Achse
(b) $G = K \cap \mathbb{H}$ für einen Kreis $K \subset \mathbb{C}$ mit Mittelpunkt $m \in \mathbb{R}$

Die hyperbolische Strecke $S_{x,y}$ von x nach y, für $x \neq y \in \mathbb{H}$ ist die abgeschlossene zusammenhängende Teilmenge der durch die x und y verlaufenden hyperbolischen Geraden mit Rand $\{x, y\}$. Hyperbolische Strecken sind somit senkrechte euklidische Strecken oder Kreisbögen.

Bemerkung. (1) Es existiert genau eine hyperbolische Gerade durch ein Paar von Punkten, denn sind die Realteile gleich, ist die Gerade von Typ (a) definiert durch den Realteil der Punkte und falls die Realteile ungleich sind, schneidet die Mittelsenkrechte der euklidischen Strecke der Punkte die reelle Achse in genau einem Punkt m und die hyperbolische Gerade ist von Typ (b) mit Mittelpunkt m.
(2) Somit existiert immer auch genau eine hyperbolische Strecke $S_{x,y}$ zweier Punkte.
(3) Die hyperbolischen Geraden haben wir genauso konstruiert, dass sie Bilder von I^+ unter Automorphismen sind. Vor allem finden wir zu jedem Paar von hyperbolischen Geraden G, G' einen Automorphismus $g^{-1} \circ f$ für $f, g \in Aut(\mathbb{H})$ mit $f(G) = I^+ = g(G')$, der eine Gerade in die andere überführt.

Da wir Strecken in Geraden einbetten können, bekommen wir auch folgende Lemmata zu Längen und Abständen:

Lemma 4.3. Seien $x, x', y, y' \in \mathbb{H}$: Es existiert ein $f \in Aut(\mathbb{H})$, sodass $f(S_{x,y}) = S_{x',y'}$ genau dann wenn $L_{\mathbb{H}}(S_{x,y}) = L_{\mathbb{H}}(S_{x',y'})$.

Beweis. Die Hinrichtung ist klar, denn $f \in Aut(\mathbb{H})$ erhält Längen. Seien G, G' die hyperbolischen Geraden, die jeweils durch x, y und x', y' gehen. Beide Geraden können auf I^+ abgebildet werden und nach eventueller Verknüpfung mit $J(z) = -\frac{1}{z}$ und $M_a(z) = az$ für ein geeignetes $a > 0$ finden wir demnach Automorphismen $g, h \in Aut(\mathbb{H})$, sodass $g(G) = I^+ = h(G')$ mit $g(x) = i = h(x')$, $g(y) = bi$ und $h(y') = ci$ für $b, c \geq 1$. Da g und h Homöomorphismen sind, gilt $g(S_{x,y}) = S_{i,bi}$ und $h(S_{x',y'}) = S_{i,ci}$. Damit erhalten wir auch $L_{\mathbb{H}}(S_{x,y}) = L_{\mathbb{H}}(S_{i,bi}) = \ln(b)$ und $L_{\mathbb{H}}(S_{x',y'}) = L_{\mathbb{H}}(S_{i,ci}) = \ln(c)$, wodurch die Rückrichtung folgt, denn mit $f := h^{-1} \circ g$ haben wir:

$$L_{\mathbb{H}}(S_{x,y}) = L_{\mathbb{H}}(S_{x',y'}) \implies b = c \implies h^{-1}(S_{i,bi}) = h^{-1}(S_{i,ci}) \implies f(S_{x,y}) = S_{x',y'}$$

□

Lemma 4.4. Für zwei Punktepaare x, y und x', y' existiert ein $f \in Aut(\mathbb{H})$ mit $f(x) = x', f(y) = y'$ genau dann wenn $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(x', y')$.

Beweis. Die Hinrichtung ist klar, da $f \in Iso(\mathbb{H})$. Für die Rückrichtung benutzen wir die gleichen Bezeichnungen wie im Beweis vom Lemma 4.3. Dann ist

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(i, bi) = \ln(b) = L_{\mathbb{H}}(S_{x,y}) \quad \text{und analog} \quad d_{\mathbb{H}}(x', y') = \ln(c) = L_{\mathbb{H}}(S_{x',y'})$$

Aus der Gleichheit der Abstände folgt also $b = c$ und das oben konstruierte f erfüllt: $f(x) = x'$ und $f(y) = h^{-1}(bi) = h^{-1}(ci) = y'$. □

Vor allem haben wir im Beweis des Korollars gesehen, dass der hyperbolische Abstand zweier Punkte $x, y \in \mathbb{H}$ durch die Länge der hyperbolischen Strecke von x nach y gegeben ist, was unser Ziel für eine passende Definition der Strecke war. Ebenfalls können wir nun endlich $d_{\mathbb{H}}(x, y) = 0 \implies x = y$ zeigen, was wir im letzten Kapitel aufgeschoben haben, denn benutze $g \in Aut(\mathbb{H}), b \geq 1$ aus den letzten beiden Beweisen und es gilt $0 = d_{\mathbb{H}}(x, y) = \ln(b)$, was $b = 1$ und $x = y$ impliziert.

Nachdem wir zusätzlich zu Längen und Abständen passende Geraden und Strecken bestimmt haben, schließen wir das Kapitel mit der Bestimmung der Isometriegruppe der oberen Halbebene ab. Wir wissen bereits, dass seit der Konstruktion von $\Phi_{\mathbb{H}}$ gilt, dass $Aut(\mathbb{H}) \subset Iso(\mathbb{H})$. Allerdings sind das nicht alle Isometrien. Betrachten wir eine Gerade G mit der Geradengleichung $az\overline{z} + bz + b\overline{z} + c = 0$. Wir sehen sofort, dass diese symmetrisch ist bezüglich der komplexen Konjugation. Zwar ist dies keine Abbildung nach $\mathbb{H}$, aber $\sigma : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ gegeben durch $\sigma(z) = -\overline{z}$, also die

Spiegelung an I^+, erfüllt $Im(-\overline{z}) = Im(z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$. Außerdem haben wir mit $w = -\overline{z}$, dass $\sigma(G) = \{w \in \mathbb{H} : aw\overline{w} - bw - b\overline{w} + c = 0\}$ und $(-b)^2 > ac$ wieder eine hyperbolische Gerade ist. Da σ ein Homöomorphismus ist, folgt auch, dass $\sigma(S_{x,y}) = S_{\sigma(x),\sigma(y)}$ eine hyperbolische Strecke ist. Beachte, dass wir nicht Lemma 4.3 und 4.4 benutzen können, um zu zeigen, dass die Länge der gespiegelten Strecke oder der Abstand der gespiegelten Punkte immer noch gleich ist, denn $\sigma \notin Aut(\mathbb{H})$. Trotzdem stimmt es:

Lemma 4.5. Die Abbildung $\sigma : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, gegeben durch $\sigma(z) = -\overline{z}$ definiert eine Isometrie der Riemannschen Metrik $\Phi_{\mathbb{H}}$ auf sich selbst. Die hyperbolische Länge und der Abstand bleiben durch σ erhalten und es gilt, dass $\sigma \in Iso(\mathbb{H})$.

Beweis. Zwar ist σ nicht holomorph, aber diffeomorph, denn σ lässt sich schreiben als lineare Abbildung in $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^2$, gegeben durch die Matrix: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Somit ist die totale Ableitung $d\sigma_z$ für jeden Punkt $z \in \mathbb{H}$ ebenfalls gegeben durch diese Matrix. Unser $\Phi_{\mathbb{H}}$ gibt uns für jedes z das Skalarprodukt

$$< v, w >_z = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{Im(z)^2}$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$. Die Isometrie folgt durch folgende Gleichung für alle $z \in \mathbb{H}$:

$$< d\sigma_z(v), d\sigma_z(w) >_{\sigma(z)} = \frac{(-v_1)(-w_1) + v_2 w_2}{Im(-\overline{z})^2} = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{Im(z)^2} = < v, w >_z \ \forall v, w \in \mathbb{R}^2$$

Der Rest folgt aus Lemma 3.5. $\square$

Die Isometriengruppe der oberen Halbebene ist also echt größer als die Automorphismengruppe. Zur Bestimmung von $Iso(\mathbb{H})$ übernehmen wir die Argumentation aus dem Buch [2] "Hyperbolic Geometry", Kapitel 3.6 von James W. Anderson. Dazu starten wir mit folgenden Lemmata, die zeigen, dass Isometrien der oberen Halbebene Geraden auf Geraden abbilden:

Lemma 4.6. Seien $x, y, z \in \mathbb{H}$ paarweise verscheiden. Dann gilt:

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z) = d_{\mathbb{H}}(x, z)$$

genau dann wenn $y \in S_{x,z}$, d.h. y liegt auf der Strecke von x nach z.

Beweis. Das Lemma folgt sofort, da die Abstände durch die Längen der einzelnen Strecken gegeben sind und die Gleichung genau dann gilt, wenn $S_{x,y} \cup S_{y,z} = S_{x,z}$, was wiederum genau dann gilt, wenn $y \in S_{x,z}$. $\square$

Lemma 4.7. Für jedes $f \in Iso(\mathbb{H})$ und jede hyperbolische Strecke $S_{x,z}$ gilt, dass $f(S_{x,z})$ ebenfalls eine Strecke ist. Zusätzlich bildet jedes $f \in Iso(\mathbb{H})$ hyperbolische Geraden auf hyperbolische Geraden ab.

Beweis. Sei $y \in S_{x,z}$. Dann gilt nach Lemma 4.6, dass $d_{\mathbb{H}}(x,z) = d_{\mathbb{H}}(x,y) + d_{\mathbb{H}}(y,z)$. Wenden wir $f \in Iso(\mathbb{H})$ auf alle drei Abstände an, dann erhalten wir auch

$$d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y)) + d_{\mathbb{H}}(f(y), f(z)) = d_{\mathbb{H}}(f(x), f(z))$$

Dann gilt ebenfalls nach Lemma 4.6, dass $f(y) \in S_{f(x),f(z)}$, d.h. $f(S_{x,z}) \subset S_{f(x),f(z)}$. Analog können wir mit $f^{-1} \in Iso(\mathbb{H})$ beweisen, dass

$$f^{-1}(S_{f(x),f(z)}) \subset S_{x,z} \quad \Longleftrightarrow \quad S_{f(x),f(z)} \subset f(S_{x,z})$$

Insgesamt haben wir, dass $f(S_{x,z}) = S_{f(x),f(z)}$ ebenso eine Strecke ist.
Sei G nun eine Gerade. Diese können wir als Vereinigung von ineinander liegenden Strecken S_{x_n,z_n} schreiben, sodass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Randpunkt und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den zweiten Randpunkt aus $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ von G konvergiert. Das bedeutet, wir haben

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{x_n,z_n}$$

Wegen $f(S_{x_n,z_n}) = S_{f(x_n),f(z_n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann, dass das Bild von G

$$f(G) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{f(x_n),f(z_n)}$$

ebenfalls eine Vereinigung von ineinander liegenden Strecken ist. $f(G)$ muss dann ebenso eine hyperbolische Gerade sein, denn wäre $f(G)$ nur eine Strecke, dann wäre $f^{-1}(f(G)) = G$ auch nur eine Strecke statt einer Gerade wie angenommen. □

Ein weiteres Hilfsmittel wird die hyperbolische Mittelsenkrechte einer Strecke sein, die wir analog zur euklidischen Mittelsenkrechte, aber mit hyperbolischen Abständen definieren und von der wir zeigen, dass sie auch eine hyperbolische Gerade ist.

Definition 4.8. Sei $x \neq y \in \mathbb{H}$. Die hyperbolische Mittelsenkrechte $M_{x,y}$ von $S_{x,y}$ besteht aus allen Punkten, die den selben Abstand zu x wie y haben:

$$M_{x,y} := \{z \in \mathbb{H} : d_{\mathbb{H}}(x,z) = d_{\mathbb{H}}(y,z)\}$$

Bemerkung. Für jede Isometrie $f \in Iso(\mathbb{H})$ gilt, dass $f(M_{x,y}) = M_{f(x),f(y)}$, denn für alle $z \in M_{x,y}$ ist dann auch $d_{\mathbb{H}}(f(x), f(z)) = d_{\mathbb{H}}(f(y), f(z))$, also $f(z) \in M_{f(x),f(y)}$ und analog haben wir mit $f^{-1} \in Iso(\mathbb{H})$, dass $f^{-1}(M_{f(x),f(y)}) \subset M_{x,y}$.

Lemma 4.9. Die hyperbolische Mittelsenkrechte $M_{x,y}$ einer Strecke $S_{x,y}$ ist eine hyperbolische Gerade, die senkrecht zu $S_{x,y}$ ist.

Beweis. Zuerst kann zu jedem vorgegebenen Abstand $c > 0$ ein $z \in \mathbb{H}, Re(z) > 0$ gefunden werden, sodass $d_{\mathbb{H}}(-\overline{z}, z) = c$, denn erst einmal liegt die hyperbolische Strecke von solch einem z nach $-\overline{z}$ genau auf dem Kreis mit Radius $\alpha := |z| > 0$ und

Mittelpunkt 0, d.h. die Strecke kann parametrisiert werden mit $\gamma : [\theta, \pi - \theta] \to \mathbb{H}$, $\gamma(t) = \alpha e^{it}$, wobei $\gamma(\theta) = z, \gamma(\pi - \theta) = -\overline{z}$ für ein $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Wir haben dann:

$$d_{\mathbb{H}}(z, -\overline{z}) = \int_{\theta}^{\varphi} \frac{|i\alpha e^{it}|}{Im(\alpha e^{it})} dt = \int_{\theta}^{\varphi} \frac{1}{\sin(t)} dt = \left[\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right]_{\theta}^{\pi-\theta} = -2\ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Jeder Abstand $c > 0$ wird also realisiert durch $\theta = 2\arctan\left(e^{-\frac{c}{2}}\right) \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $\alpha > 0$ frei wählbar. Sei nun $x \neq y \in \mathbb{H}$. Wir wählen $z \in \mathbb{H}$, $Re(z) > 0$, sodass $d_{\mathbb{H}}(z, -\overline{z}) = d_{\mathbb{H}}(x, y) > 0$ und nach Lemma 4.3 und 4.4 finden wir $g \in Aut(\mathbb{H})$, sodass $g(z) = x, g(-\overline{z}) = y$ sowie $g(S_{z,-\overline{z}}) = S_{x,y}$. Wegen $g \in Iso(\mathbb{H})$, gilt auch für die Mittelsenkrechten: $g(M_{z,-\overline{z}}) = M_{x,y}$. Da g hyperbolische Geraden auf Geraden abbildet und konform ist, reicht es zu zeigen, dass $M_{z,-\overline{z}}$ für alle $z \in \mathbb{H}$ mit $Re(z) > 0$ eine Gerade ist, die senkrecht zu $S_{z,-\overline{z}}$ ist. Ich behaupte, dass $I^+ = M_{z,-\overline{z}}$:
"$\subset$": Sei $bi \in I^+$ beliebig. Da $\sigma \in Iso(\mathbb{H})$, haben wir $d_{\mathbb{H}}(bi, z) = d_{\mathbb{H}}(-\overline{bi}, -\overline{z}) = d_{\mathbb{H}}(bi, -\overline{z})$, also $I^+ \subset M_{z,-\overline{z}}$.
"$\supset$": Angenommen $w \in M_{z,-\overline{z}} \setminus I^+$, o.B.d.A sei $Re(w) > 0$, ansonsten tausche im Folgenden überall die Rollen von z und $-\overline{z}$. Dann schneidet die Strecke $S_{-\overline{z},w}$ die positive imaginäre Achse in einem $bi \in I^+$. Mit $w \in M_{z,-\overline{z}}$, Lemma 4.6 und σ Isometrie, in genau dieser Reihenfolge, gilt dann:

$$d_{\mathbb{H}}(z, w) = d_{\mathbb{H}}(-\overline{z}, w) = d_{\mathbb{H}}(-\overline{z}, bi) + d_{\mathbb{H}}(bi, w) = d_{\mathbb{H}}(z, bi) + d_{\mathbb{H}}(bi, w)$$

woraus nach Lemma 4.6 folgt, dass $bi \in S_{z,w}$. Jedoch liegt die Strecke von z nach w wegen $Re(z), Re(w) > 0$ komplett in der Menge aller ζ mit $Re(\zeta) > 0$ und kann bi nicht enthalten, also ist unsere Annahme, dass es Elemente in $M_{z,-\overline{z}}$ gibt, die nicht in I^+ liegen, falsch gewesen.
Außerdem ist I^+ senkrecht zu $S_{z,-\overline{z}}$, denn am Schnittpunkt $|z|i$ ist die Tangente $\{\zeta \in \mathbb{C} : Im(\zeta) = |z|\}$ des Kreisbogens parallel zur reellen Achse. □

Jetzt haben wir alles zusammen, was wir brauchen, um die Isometriegruppe der oberen Halbebene zu bestimmen und formulieren folgenden Satz:

Satz 4.10. Die Isometriegruppe der oberen Halbebene wird erzeugt durch ihre Automorphismengruppe und der Spiegelung an der positiven imaginären Achse, in Formeln:

$$Iso(\mathbb{H}) = < Aut(\mathbb{H}), \sigma > \cong < PSL(2, \mathbb{R}), \sigma >$$

Beweis. Definiere $H^+ := \{z \in \mathbb{H} : Re(z) > 0\}$ und analog H^- mit $Re(z) < 0$. Sei $x, y \in I^+$ und $f \in Iso(\mathbb{H})$ beliebig. Wegen $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y))$, existiert nach Lemma 4.4 ein $g \in Aut(\mathbb{H})$ mit $g(f(x)) = x, g(f(y)) = y$. Jetzt sind x, y beides Fixpunkte von $g \circ f$, womit nach Lemma 4.7 gilt, dass $g \circ f(I^+) = I^+$, weil $g \circ f \in Iso(\mathbb{H})$ und I^+ die eindeutige Gerade durch x und y ist. Sei $z \in I^+$ beliebig. Wieder benutzen wir, dass x, y Fixpunkte von $g \circ f$ sind und wir erhalten:

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) = d_{\mathbb{H}}(x, g \circ f(z)) \quad \text{und} \quad d_{\mathbb{H}}(y, z) = d_{\mathbb{H}}(y, g \circ f(z))$$

Daraus folgt dann auch $g \circ f(z) = z$ für alle $z \in I^+$, denn z ist eindeutig durch $d_{\mathbb{H}}(x, z)$ und $d_{\mathbb{H}}(y, z)$ charakterisiert. Für gegebene $\mu, c > 0$ existieren nämlich genau zwei Lösungen für $d_{\mathbb{H}}(\mu i, \lambda i) = |\ln(\mu) - \ln(\lambda)| = c$, nämlich

$$\lambda_1 = e^{\ln(\mu)-c} \leq \mu, \lambda_2 = e^{\ln(\mu)+c} \geq \mu$$

wobei ein Punkt unter und einer über μi liegt. Somit kann es höchstens nur eine Lösung geben für das System $d_{\mathbb{H}}(\mu i, \lambda i) = c$, $d_{\mathbb{H}}(\nu i, \lambda i) = c'$ mit $\mu, \nu, c, c' > 0$.

Sei $w \in \mathbb{H} \setminus I^+$ beliebig, dann gilt für $p := |w|^2 i$ und $q := i$, dass $|w|i \in S_{p,q}$, da

$$d_{\mathbb{H}}(p, |w|i) = d_{\mathbb{H}}(q, |w|i) = |\ln(|w|)|$$

was heißt, dass die Mittelsenkrechte $M_{p,q}$ von $S_{p,q} \subset I^+$ die Strecke in $|w|i$ schneidet. Nach Lemma 4.9 sind $M_{p,q}$ und $S_{p,q}$ senkrecht zueinander sind und es ergibt sich, dass $M_{p,q} = \{z \in \mathbb{H} : |z| = |w|\}$, da es senkrecht zu I^+ ist und $|w|i$ enthält.

Wegen $S_{p,q} \subset I^+ \subset \text{Fixpunkte}(g \circ f)$ haben wir $g \circ f(S_{p,q}) = S_{p,q}$ und wegen $g \circ f \in Iso(\mathbb{H})$ auch $g \circ f(M_{p,q}) = M_{p,q}$. Dadurch bekommen wir $d_{\mathbb{H}}(|w|i, w) = d_{\mathbb{H}}(|w|i, g \circ f(w))$ und $g \circ f(w) \in M_{p,q}$, aber auch $-\overline{w} \in M_{p,q}$ und $d_{\mathbb{H}}(|w|i, w) = d_{\mathbb{H}}(|w|i, -\overline{w})$, wegen $\sigma \in Iso(\mathbb{H})$. Da es wie vorhin nur zwei Punkte auf einer Geraden durch $|w|i$ geben kann, die den selben Abstand zu $|w|i$ haben, muss $g \circ f(w) = w$ oder $g \circ f(w) = -\overline{w} = \sigma(w)$ gelten. Da $g \circ f(I^+) = I^+$ haben wir $g \circ f(H^+) = H^+$ oder $g \circ f(H^+) = H^-$ und da w beliebig war, erhalten wir im ersten Fall $g \circ f = id$ und im zweiten Fall $g \circ f = \sigma$, womit gezeigt ist, dass $f \in < Aut(\mathbb{H}), \sigma >$. □

Korollar 4.11. Jedes Element $f \in Iso(\mathbb{H})$ ist von folgender Form:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1$$

$$f(z) = \frac{a(-\overline{z})+b}{c(-\overline{z})+d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1$$

Beweis. Die erste Form sind genau alle Automorphismen; die zweite Form erhalten wir indem wir zuerst σ und dann ein Element aus $Aut(\mathbb{H})$ anwenden. Zu zeigen ist nur noch, dass $\sigma \circ g$ für $g \in Aut(\mathbb{H})$ ebenfalls von der zweiten Form ist, denn wir haben

$$\sigma(g(z)) = -\overline{\frac{ez+f}{gz+h}} = \frac{e(-\overline{z})-f}{(-g)(-\overline{z})+h} =: \frac{a(-\overline{z})+b}{c(-\overline{z})+d}$$

mit a, b, c, d immer noch in $\mathbb{R}$ und $ad - bc = eh - (-f)(-g) = 1$. □

5 Weitere Modelle und ihre Isometriegruppen

5.1 Die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ als hyperbolische Ebene

Wie in Kapitel 3 angekündigt, nutzen wir, dass bereits $\mathbb{H}$ als hyperbolische Ebene durch $\Phi_{\mathbb{H}}$ gegeben ist, sowie die Abbildungen von Lemma 2.6, um eine Riemannsche Metrik für $\mathbb{D}$ zu konstruieren, sodass aus ihnen nach Konstruktion Isometrien von Riemannschen Metriken werden. Das daraus resultierende geometrische Modell für die Einheitskreisscheibe ist dann auch die hyperbolische Ebene.

Im Folgenden schreiben wir $z \in \mathbb{C}$ als Koordinate für einen Punkt aus der oberen Halbebene und $w \in \mathbb{C}$ als Koordinate für einen Punkt aus der Einheitskreisscheibe. Wir nutzen die aus Kapitel 2 gegebenen Möbiustransformationen sind $g : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ und $h := g^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ mit

$$g(z) = \frac{z-i}{z+i} \quad \text{und} \quad h(w) = i\frac{1+w}{1-w}$$

Unser Ziel ist es eine Riemannsche Metrik $\Phi_{\mathbb{D}}$ zu konstruieren, sodass h uns die Isometrie $(\mathbb{D}, \Phi_{\mathbb{D}}) \cong (\mathbb{H}, \Phi_{\mathbb{H}})$ gibt. Zum einen erhalten wir nach Lemma 3.7 durch Konjugation mit h die Isometriegruppe von $\mathbb{D}$ aus $Iso(\mathbb{H})$, die wiederum $Aut(\mathbb{H})$ enthält. Zum anderen erhielten wir in Lemma 2.6 durch Konjugation mit demselben h die Automorphismengruppe von $\mathbb{D}$ aus $Aut(\mathbb{H})$, woraus $Aut(\mathbb{D}) \subset Iso(\mathbb{D})$ folgt. Beachte, dass diese Bedingung unsere Mindestannahme für die Konstruktion von $\mathbb{D}$ als die hyperbolische Ebene gewesen wäre, wenn wir die Vorgehensweise vom letzten Kapitel für $\mathbb{D}$ anwenden würden.

Sei $\Phi_{\mathbb{H}} = \frac{|dz|^2}{Im(z)^2}$ unsere Riemannsche Metrik für $\mathbb{H}$ und schreibe $z = h(w)$ für ein $w \in \mathbb{D}$ sowie $<,>_z^{\mathbb{H}}$ für das Skalarprodukt gegeben durch $\Phi_{\mathbb{H}}$ in z. Wir bestimmen $\Phi_{\mathbb{D}}$ für $\mathbb{D}$ so, dass für alle Skalarproduke $<,>_w^{\mathbb{D}}$ gegeben durch $\Phi_{\mathbb{D}}$ in w und für alle $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ erfüllt ist:

$$< \zeta_1, \zeta_2 >_w^{\mathbb{D}} = < h'(w)\zeta_1, h'(w)\zeta_2 >_z^{\mathbb{H}} = \frac{Re(\overline{h'(w)\zeta_1} h'(w)\zeta_2)}{Im(z)^2} = |h'(w)|^2 \frac{Re(\overline{\zeta_1}\zeta_2)}{Im(z)^2}$$

Somit soll gelten:

$$\Phi_{\mathbb{D}} = |h'(w)|^2 \frac{|dw|^2}{Im(z)^2}$$

Berechne also $|h'(w)|^2$ und $Im(z)^2$ als Term in w und wir sind fertig. Es gilt:

$$h'(w) = i\frac{(1-w)+(1-w)}{(1-w)^2} = \frac{2i}{(1-w)^2}$$

sowie

$$Im(z) = Im(h(w)) = \frac{1}{2i}\left(i\frac{1+w}{1-w} - \left(-i\frac{1+\overline{w}}{1-\overline{w}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+w}{1-w} + \frac{1+\overline{w}}{1-\overline{w}}\right)$$

$$= \frac{(1 + w - \overline{w} - |w|^2) + (1 + \overline{w} - w - |w|^2)}{2|1-w|^2} = \frac{2 - 2|w|^2}{2|1-w|^2} = \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2}$$

Insgesamt gilt also

$$\Phi_{\mathbb{D}} = \frac{4}{|1-w|^4} \frac{|1-w|^4}{(1-|w|^2)^2} |dw|^2 = \frac{4|dw|^2}{(1-|w|^2)^2}$$

und wir können definieren:

Definition 5.1. Die hyperbolische Ebene als Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ (mit Koordinaten $w \in \mathbb{C}, (u, v) \in \mathbb{R}^2$) ist gegeben durch die Riemannsche Metrik

$$\Phi_{\mathbb{D}} = \frac{4|dw|^2}{(1-|w|^2)^2} = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1-u^2-v^2)^2}$$

Bemerkung. Wir haben $\Phi_{\mathbb{D}}$ genauso konstruiert, dass h eine Isometrie für $(\mathbb{D}, \Phi_{\mathbb{D}}) \cong (\mathbb{H}, \Phi_{\mathbb{H}})$ definiert und wie bereits $\Phi_{\mathbb{H}}$ ist $\Phi_{\mathbb{D}}$ eine Skalierung des Standardskalarprodukts.

Unser $h : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ gibt uns auch jetzt die Möglichkeit, die Isometriegruppe der Einheitskreisscheibe auszurechnen:

Satz 5.2. Die Isometriegruppe der Einheitskreisscheibe wird erzeugt durch ihre Automorphismengruppe und der Spiegelung an der reellen Achse, die durch die komplexe Konjugation $\bar{\cdot}$ gegeben ist, in Formeln:

$$Iso(\mathbb{D}) = < Aut(\mathbb{D}), \bar{\cdot} > \cong < PU(1,1), \bar{\cdot} >$$

Beweis. Da h uns die Isometrie $(\mathbb{D}, \Phi_{\mathbb{D}}) \cong (\mathbb{H}, \Phi_{\mathbb{H}})$ gibt, bekommen wir nach Lemma 3.7, die Isometriegruppe von $\mathbb{D}$ durch Konjugation mit h, also

$$Iso(\mathbb{D}) = \{g \circ f \circ h : f \in Iso(\mathbb{H})\}$$

Wir konjugieren die Erzeuger von $Iso(\mathbb{H})$, siehe Satz 4.10, um die Erzeuger von $Iso(\mathbb{D})$ zu erhalten. Zum einen haben wir $Aut(\mathbb{H}) \cong PSL(2, \mathbb{R})$, welche wir ja genau durch Konjugation mit der Inversen von h, also g, aus $Aut(\mathbb{D})$ erhalten haben, woraus $Aut(\mathbb{D}) \subset Iso(\mathbb{D})$ folgt. Als letzten Erzeuger haben wir $\sigma : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $\sigma(z) = -\overline{z}$, was $g \circ \sigma \circ h$ zum letzten Erzeuger von $Iso(\mathbb{D})$ macht. Sei $h(w) = z$, dann ist:

$$-\overline{z} = i\frac{1+\overline{w}}{1-\overline{w}}$$

und

$$\forall w \in \mathbb{D} : g(\sigma(h(w)) = g(-\overline{z}) = \frac{-\overline{z} - i}{-\overline{z} + i} = \frac{i\frac{1+\overline{w}}{1-\overline{w}} - i}{i\frac{1+\overline{w}}{1-\overline{w}} + i} = \frac{(1+\overline{w}) - (1-\overline{w})}{(1+\overline{w}) + (1-\overline{w})} = \overline{w}$$

also ist $g \circ \sigma \circ h$ die komplexe Konjugation. □

Korollar 5.3. Jedes Element $f \in Iso(\mathbb{D})$ ist von folgender Form:

$$f(w) = \frac{\alpha w + \beta}{\overline{\beta} w + \overline{\alpha}} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$$

$$f(w) = \frac{\alpha \overline{w} + \beta}{\overline{\beta} \overline{w} + \overline{\alpha}} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$$

Beweis. Die erste Form sind genau die Elemente aus $Aut(\mathbb{D})$, die zweite die komplexe Konjugation verknüpft mit einem Automorphismus und offensichtlich erhalten wir die zweite Form auch wenn wir erst einen Automorphismus und dann die komplexe Konjugation anwenden. $\square$

Nachdem wir nun den Isomorphismus zwischen den Isometriegruppen von $\mathbb{D}$ und $\mathbb{H}$ gegeben haben, können wir zum Schluss den daraus abgeleiteten Isomorphismus von $PSL(2,\mathbb{R})$ nach $PU(1,1)$ explizit angeben:

$$\begin{aligned} PSL(2,\mathbb{R}) &\longrightarrow PU(1,1) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dieser ist bereits in umgekehrter Richtung im Beweis von Satz 2.6. zu finden, siehe die Konjugation mit der dort definierten Matrix B, die g als Möbiustransformation definiert.

5.2 Das Hyperboloid-Modell der hyperbolischen Ebene

Bisher haben wir Modelle kennengelernt, deren Menge von Punkten Gebiete in $\mathbb{C}$ waren. Diesmal betrachten wir die Oberfläche eines Hyperboloids eingebettet in den $\mathbb{R}^3$:

$$S := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1\}$$

Wie die Sphäre können wir mithilfe einer stereographischen Projektion π die obere Hälfte des Hyperboloids $S^+ = \{x \in S : x_3 > 0\}$ auf die Ebene $E := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ projizieren sowie mit der Umkehrabbildung σ die Oberfläche mithilfe einer Teilmenge von $E \cong \mathbb{C}$, welche die Einheitskreisscheibe sein wird, parametrisieren. Statt einer Riemannschen Metrik oder äquivalent einer Familie von Skalarprodukten für jeden Punkt, betrachten wir für jedes $P \in S^+$ das sogenannte Lorentz-Skalarprodukt Λ, eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$. Die geometrischen Modelle (S^+, Λ) und $(\mathbb{D}, \Phi_{\mathbb{D}})$ sind isometrisch, wenn wir zeigen, dass π, σ Diffeomorphismen sind und wir die gleiche Eigenschaft nachrechnen wie zu Isometrien von Riemannschen Metriken in Definition 3.4. Folglich haben wir mit (S^+, Λ) ein weiteres Modell der hyperbolischen Ebene. Hierzu übernehmen wir das Wesentliche aus dem Kapitel 5.7 von [3]

"Curved Spaces: From Classical Geometries to Elementary Differential Geometry" von P.M.H. Wilson:

Sei das Lorentz-Skalarprodukt $\Lambda(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$ auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dann wird die obere Hälfte des Hyperboloids S^+ durch $\Lambda(x,x) = -1$ und $x_3 > 0$ beschrieben. Die stereographische Projektion leiten wir folgendermaßen ab:
Die Gerade durch $(0,0,-1) \in S$ und $P = (x_1, x_2, x_3) \in S^+$ ist gegeben durch $(0,0,-1) + \lambda(P - (0,0,-1)) = (\lambda x_1, \lambda x_2, -1 + \lambda(x_3+1)), \lambda \in \mathbb{R}$ und schneidet E genau dann wenn

$$-1 + \lambda(x_3 + 1) = 0 \iff \lambda = \frac{1}{x_3+1}$$

Setzen wir dieses λ in unsere Geradengleichung ein, erhalten wir den eindeutigen Schnittpunkt

$$\left(\frac{x_1}{x_3+1}, \frac{x_2}{x_3+1}, 0\right)$$

Die Formel für die Projektion $\pi : S^+ \to \mathbb{C}$ ist dann gegeben durch

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{x_3 + 1}$$

Wir zeigen, dass $\pi(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{D}$, denn

$$\left|\frac{x_1 + ix_2}{x_3+1}\right|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_3+1)^2} = \frac{x_3^2 - 1}{(x_3+1)^2} = \frac{x_3 - 1}{x_3 + 1} < 1$$

denn $x_3 - 1 < x_3 + 1$ gilt für alle $x_3 > 0$.

Die Umkehrabbildung $\sigma : \mathbb{D} \to S^+$ berechnen wir folgendermaßen: Sei $u + iv \in \mathbb{D}$. Wir suchen nun unser passendes $(x_1, x_2, x_3) \in S^+$. Unter Berücksichtigung der letzten Gleichung muss $r^2 := u^2 + v^2 = \frac{x_3-1}{x_3+1}$ erfüllt sein. Daraus erhalten wir $x_3 + 1 = \frac{1+r^2}{1-r^2} + 1 = \frac{2}{1-r^2}$. Dann sollen $x_1 = u(x_3+1) = \frac{2u}{1-r^2}$ und $x_2 = v(x_3+1) = \frac{2v}{1-r^2}$ erfüllt sein und σ lässt sich angeben durch:

$$\sigma(u + iv) = \left(\frac{2u}{1-u^2-v^2}, \frac{2v}{1-u^2-v^2}, \frac{1+u^2+v^2}{1-u^2-v^2}\right)$$

Sowohl π als auch σ sind Diffeomorphismen, denn sie sind invers zueinander und die partiellen Ableitungen

$$\pi_1(x) = \frac{1}{x_3+1}\ ,\ \pi_2(x) = \frac{i}{x_3+1}\ ,\ \pi_3(x) = \frac{-(x_1 + ix_2)}{(x_3+1)^2}$$

und (mit $\mathbb{D}$ betrachtet als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ von nun an)

$$\sigma_u(u,v) = \frac{2}{(1-u^2-v^2)^2}(1+u^2-v^2, 2uv, 2u)$$

$$\sigma_v(u,v) = \frac{2}{(1-u^2-v^2)^2}(2uv, 1+v^2-u^2, 2v)$$

sind alle stetig, was die Existenz der totalen Ableitungen $d\pi_P$ und $d\sigma_{\pi(P)}$ für alle $P \in S^+$ gegeben durch die partiellen Ableitungen garantiert.

Die Isometrie $(S, \Lambda) \cong (\mathbb{D}, \Phi_{\mathbb{D}})$ ist gegeben durch σ, wenn wir für alle $P \in S^+$ zeigen, dass

$$\Lambda\left(d\sigma_{\pi(P)}(x), d\sigma_{\pi(P)}(y)\right) =< x, y >^{\mathbb{D}}_{\pi(P)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

Zunächst gilt für die Einheitsvektoren $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$:

$$d\sigma_{\pi(P)}(e_1) = \sigma_u(\pi(P)) \ , \ d\sigma_{\pi(P)}(e_2) = \sigma_v(\pi(P))$$

Da Λ symmetrisch, bilinear und $d\sigma$ linear ist, folgt

$$\Lambda\left(d\sigma_{\pi(P)}(x), d\sigma_{\pi(P)}(y)\right) = x^T \begin{pmatrix} \Lambda\left(\sigma_u(\pi(P)), \sigma_u(\pi(P))\right) & \Lambda\left(\sigma_u(\pi(P)), \sigma_v(\pi(P))\right) \\ \Lambda\left(\sigma_u(\pi(P)), \sigma_v(\pi(P))\right) & \Lambda\left(\sigma_v(\pi(P)), \sigma_v(\pi(P))\right) \end{pmatrix} y$$

Schreibe $\pi(P) = (a, b)$ und berechne die Komponenten obiger Matrix:

$$\Lambda\left(\sigma_u(a,b), \sigma_u(a,b)\right) = \frac{4((1+a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 - 4a^2)}{(1-a^2-b^2)^4} = \frac{4}{(1-a^2-b^2)^2}$$

$$\Lambda\left(\sigma_v(a,b), \sigma_v(a,b)\right) = \frac{4(4a^2b^2 + (1+b^2-a^2)^2 - 4b^2)}{(1-a^2-b^2)^4} = \frac{4}{(1-a^2-b^2)^2}$$

$$\Lambda\left(\sigma_u(a,b), \sigma_v(a,b)\right) = \frac{4((1+a^2-b^2)2ab + 2ab(1+b^2-a^2) - 2a2b)}{(1-a^2-b^2)^2} = 0$$

Dies ist genau die Matrix und die dazugehörige Bilinearform gegeben durch

$$\Phi_{\mathbb{D}} = \frac{4(du^2+dv^2)}{(1-u^2-v^2)^2}$$

in $\pi(P) = (a,b) \in \mathbb{D}$, was die Gleichheit

$$< x, y >^{\mathbb{D}}_{\pi(P)} = x^T \begin{pmatrix} \Lambda\left(\sigma_u(\pi(P)), \sigma_u(\pi(P))\right) & \Lambda\left(\sigma_u(\pi(P)), \sigma_v(\pi(P))\right) \\ \Lambda\left(\sigma_u(\pi(P)), \sigma_v(\pi(P))\right) & \Lambda\left(\sigma_v(\pi(P)), \sigma_v(\pi(P))\right) \end{pmatrix} y$$

und insgesamt die Isometrie beweist.

Die Definitionen und Resultate aus Kapitel 3 können wir ebenfalls für (S^+, Λ) übernehmen. Beispielsweise ist die hyperbolische Länge eines punktweise stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a,b] \to S^+$ definiert als das Integral

$$L_{S^+}(\gamma) := \int_a^b (\Lambda(\gamma'(t), \gamma'(t)))^{\frac{1}{2}}\, dt = \int_a^b \left(\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 - \gamma_3'(t)^2\right)^{\frac{1}{2}}\, dt$$

Weiter sind Abstände zweier Punkte $d_{S^+}(x,y)$ als Infima von Längen von Wegen sowie die Isometriegruppe $Iso(S^+)$ komplett analog zu Kapitel 3 definiert. Beachte, dass Λ zwar nicht positiv definit ist und damit negative Werte annehmen kann, aber nach Lemma 3.5. die Isometrien σ, π obigen Längenbegriff mit dem der Einheitskreisscheibe gleichsetzen, was die Nichtnegativität und Endlichkeit sowohl von Längen von Wegen in S^+ als auch Abständen von Punkten aus S^+ garantiert.

Für das Lorentz-Skalarprodukt können wir die Gruppe

$$O(2,1) = \{A \in GL(3,\mathbb{R}) : \Lambda(Ax, Ay) = \Lambda(x,y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}^3\}$$

betrachten. Beachte, dass zwar alle solche Matrizen Selbstabbildungen von S definieren, da S definiert war durch die Gleichung $\Lambda(x,x) = -1$, aber nicht unbedingt S^+ auf sich selbst abgebildet wird. Nehme dazu die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, die jedes $(x_1, x_2, x_3) \in S^+$ auf $(x_1, x_2, -x_3)$ und somit S^+ auf die untere Hälfte des Hyperboloids abbildet. Deswegen betrachten wir stattdessen die Untergruppe:

$$O^+(2,1) = \{A \in O(2,1) : Ax \in S^+\ \forall x \in S^+\}$$

Dann können wir Abbildungen $f : S^+ \to S^+, f(x) = Ax$ für ein $A \in O^+(2,1)$ mit einem beliebigen Weg $\gamma : [a,b] \to S^+$ verknüpfen, wodurch wir einen weiteren Weg $f \circ \gamma : [a,b] \to S^+$ mit der selben hyperbolischen Länge erhalten, denn es gilt $(f \circ \gamma)'(t) = A\gamma'(t)$ und wir haben

$$\int_a^b (\Lambda((f\circ\gamma)'(t), (f\circ\gamma)'(t)))^{\frac{1}{2}}\, dt = \int_a^b (\Lambda(A\gamma'(t), A\gamma'(t)))^{\frac{1}{2}}\, dt = \int_a^b (\Lambda(\gamma'(t), \gamma'(t)))^{\frac{1}{2}}\, dt$$

Dies impliziert auch $d_{S^+}(x,y) = d_{S^+}(f(x), f(y))$ für alle $x, y \in S^+$, denn für alle $\gamma \in W(x,y)$ ist $f \circ \gamma \in W(f(x), f(y))$ mit selber Länge, womit wir $d_{S^+}(x,y) \geq d_{S^+}(f(x), f(y))$ erhalten und analog gilt für alle $\gamma \in W(f(x), f(y))$, dass $f^{-1} \circ \gamma \in W(x,y)$ Weg mit selber Länge ist, woraus $d_{S^+}(x,y) \leq d_{S^+}(f(x), f(y))$ folgt. Wir kommen zu dem Schluss, dass $O^+(2,1)$ in $Iso(S^+)$ enthalten ist.

Literaturverzeichnis

[1] Akhiezer, Dmitri N.: Lie Group Actions in Complex Analysis, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1995

[2] Anderson, James W.: Hyperbolic Geometry, Springer-Verlag London, 1999

[3] Wilson, P.M.H.: Curved Spaces: From Classical Geometries to Elementary Differential Geometry, Cambridge University Press, 2007

Hiermit versichere ich

Vorname, Name, Matrikelnummer

an Eides Statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbständig verfasst und dabei keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe. Die Arbeit wurde bisher weder gesamt noch in Teilen einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ort, Datum, Unterschrift