Masterarbeit

Periodengebiete komplexer Tori und Wirkungen diskreter Gruppen

Nils Plewe

Datum der Abgabe:
20.06.2018

Betreuung: Prof. Dr. Daniel Greb

Fakultät für Mathematik

Universität Duisburg-Essen

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit untersuchen wir Periodengebiete von polarisierten Tori vom Index k. Wir setzen einen Schwerpunkt darauf, Unterschiede zwischen dem Fall der Abelschen Varietäten, also $k = 0$ oder $k = g$, und dem Fall $0 < k < g$ herauszuarbeiten. Man kann jedem polarisiertem Torus vom Index k, nach Wahl einer symplektischen Basis, eine Matrix aus der Menge $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))$ der symplektischen komplexen Strukturen vom Index k zuordnen. Andersherum definiert jede Matrix aus dieser Menge einen polarisierten Torus vom Index k. Zwei Matrizen in $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))$ definieren genau dann zueinander Isomorphe Tori, wenn sie sich um eine Matrix aus $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ unterscheiden. Ziel dieser Arbeit ist es, die folgenden beiden Sätze zu beweisen:

- Der topologische Raum $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))/Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ ist genau dann hausdorff'sch, wenn $0 < k < g$.
- $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit und besitzt genau dann eine nicht-triviale, kompakte, komplexe Untermannigfaltigkeit, wenn $0 < k < g$.

Wir fangen damit an, einige elementare Resultate zu Homomorphismen zwischen komplexen Tori zu beweisen. In Kapitel Drei führen wir die Grassmann'sche Mannigfaltigkeit $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ ein. Wir zeigen dass sie ein topologischer Hausdorff-Raum ist, und konstruieren dann eine komplexe Struktur auf ihr. Zuletzt verwenden wir eine komplexe Untermannigfaltigkeit $B_g \subseteq Gr_g(\mathbb{C}^{2g})$ um die Menge aller Äquivalenzklassen von Tori zusammen mit der Wahl einer Basis zu parametrisieren.
Im vierten Kapitel führen wir Polarisierungen vom Index k auf komplexen Tori ein. Dieses Mal betrachten wir komplexe Tori als $(\mathbb{R}^{2g}, J)/\mathbb{Z}^{2g}$ mit einer komplexen Struktur J. Wir untersuchen, wann ein solcher Torus eine Polarisierung vom Index k zulässt, und bezeichnen die Menge aller dieser Strukturen mit $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))$. Dann zeigen wir, dass man diese Menge ebenfalls als Quotient der symplektischen Gruppe betrachten kann. Am Ende des Kapitels zeigen wir, dass man $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))$ die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit verleihen kann. Dazu betrachten wir eine Untermannigfaltigkeit $\mathcal{H}_{g,k} \subseteq B_g$ der Grassmann'schen, und zeigen, dass man diese als den selben Quotienten schreiben kann.
In Kapitel Fünf zeigen wir, dass der Quotient $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))/Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ genau dann ein Hausdorff-Raum ist, wenn wir im Fall der Abelschen Varietäten sind. Dazu benötigen wir diverse Resultate, welche wir später im Beweis verwenden.
Im letzten Kapitel beweisen wir, dass $\mathcal{H}_{g,k}$ genau dann eine kompakte, komplexe, nicht-triviale Untermannigfaltigkeit besitzt, wenn $0 < k < g$. Dazu betrachten wir das Bild der kompakten Menge $K := Sp_{2g}(\mathbb{R}) \cap O_{2g}(\mathbb{R})$ unter der kanonischen Projektion. Zunächst beweisen wir, dass dies eine reelle Untermannigfaltigkeit ist, und dass die Dimension im

Fall der indefiniten Polarisierungen echt größer als Null ist. Dann zeigen wir, dass es sich tatsächlich um eine komplexe Untermannigfaltigkeit handelt, indem wir den Tangentialraum explizit berechnen, und zeigen, dass dieser ein komplexer Untervektorraum des Tangentialraums von $\mathcal{H}_{g,k}$ ist.
Kapitel Zwei basiert auf den ersten Seiten von [CAV]. Die Konstruktion der Grassmann'schen in Kapitel Drei ist angelehnt an [FG, Seite 212], der Nachweis der Hausdorff-Eigenschaft ist in Eigenarbeit entstanden. Abschnitt 3.2 sowie Kapitel Vier und 5.3 verwenden hauptsächlich [CT] als Quelle. Abschnitt 5.1 basiert auf [DiG]. Kapitel Sechs ist Eigenleistung des Autors.

2 Isomorphie komplexer Tori

2.1 Lineare Algebra

In dieser Arbeit werden wir einige Resultate und Notationen aus der linearen Algebra verwenden. Diese werden wir an dieser Stelle kurz anführen. Die Beweise lassen sich im Buch [LA, Kapitel 5] finden.

Definition 2.1. *Sei A eine Matrix. Wir definieren $(A)_{ij}$ als den Eintrag in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von A.*
Die $n \times n$ Matrix E_n mit $(E_n)_{ij} = \delta_{ij}$, δ das Kronecker-Delta, nennen wir die Einheitsmatrix.

Im folgenden sei V immer ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $B := (v_1, \ldots, v_n)$ und W ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $C := (w_1, \ldots, w_n)$.

Definition 2.2. *Sei $f : W \times W \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir sagen, f ist eine **Bilinearform**, falls f(x,y) linear in x bei festem y und linear in y bei festem x ist.*

Definition 2.3. *Sei $f : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Wir sagen, f ist eine **Sesquilinearform**, wenn gilt $f(z, w)$ ist $\mathbb{C}$-linear in w bei festem z und $f(\lambda z_1 + z_2, w) = \overline{\lambda} f(z_1, w) + f(z_2, w)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.*
*Eine Sesquilinearform nennen wir **hermitesch**, falls $f(v, w) = \overline{f(w, v)}$ gilt.*

Definition 2.4. *Sei f eine Bilinearform. Wir definieren die Matrix f_C mit $(f_C)_{ij} := f(w_i, w_j)$ als die **darstellende Matrix von f** bezüglich der Basis C.*

Definition 2.5. *Sei f eine Sesquilinearform. Wir definieren die Matrix f_B mit $(f_B)_{ij} := f(v_i, v_j)$ als die **darstellende Matrix von f** bezüglich der Basis B.*

Definition 2.6. *Sei R ein K-Vektorraum mit Basis $E := (r_1, \ldots, r_n)$. Dann lässt sich jedes $r \in R$ eindeutig darstellen als $r = \lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_n r_n$. Wir definieren:*

$$\phi_E : R \to K^n$$

$$r = \lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_n r_n \mapsto (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

*Wir nennen $r_E := \phi_E(r)$ den **Vektor r dargestellt bezüglich E**.*

Satz 2.7. *Sei f eine Bilinearform, dann gilt $f(z, w) = z_C^T f_C w_C \ \forall (z, w) \in W \times W$. Sei f eine Sesquilinearform, dann gilt $f(z, w) = \overline{z_B}^T f_B w_B \ \forall (z, w) \in V \times V$.*

Satz 2.8. *[BLA, Seite 280] Sei f eine hermitesche Form. Dann sind alle Eigenwerte reell. Sei k die Anzahl der positiven Eigenwerte, l die Anzahl der negativen Eigenwerte, jeweils mit Vielfachheiten gezählt, und m die Vielfachheit des Eigenwertes 0 der Matrix f_B. Dann sind die Zahlen k, l, m eindeutig durch f bestimmt, also unabhängig von der Wahl der Basis. Es existiert eine Basis X von V, sodass*

$$f_X = \begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 \\ 0 & -E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Selbiges gilt für symmetrische Formen auf W.

Definition 2.9. *Mit der Notation oben, nennen wir die Zahl $ind(f) := l$ den **Index** von f. Wir nennen f **nicht-ausgeartet**, falls $m = 0$ gilt.*

2.2 Komplexe Tori

Sei V ein g-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und Γ ein diskreter, freier $\mathbb{Z}$-Untermodul vom Rang $2g$. Dann nennen wir die Quotientengruppe $X := V/\Gamma$ einen **komplexen Torus** und Γ nennen wir ein **Gitter**. Die Gruppenwirkung von Γ ist holomorph, frei und eigentlich diskontinuierlich (vgl. [FG, Seite 206]), und somit ist X eine zusammenhängende, komplexe Mannigfaltigkeit. Die kanonische Projektion $\pi : V \to V/\Gamma$ ist die universelle Überlagerung (vgl. [Top, Seite 174]).
Wählen wir Basen $(e_1, \ldots, e_g)$ von V und $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2g})$ von Γ, und schreiben $\lambda_i = \sum_{j=1}^{g} \gamma_{ji} e_j$, dann nennen wir die Matrix $\Pi := \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \cdots & \gamma_{1,2g} \\ \ldots & & \ldots \\ \gamma_{g,1} & \cdots & \gamma_{g,2g} \end{pmatrix}$ **Periodenmatrix** von X. Für $V = \mathbb{C}^g$ und $(e_1, \ldots, e_g)$ die Standardbasis, ist die Periodenmatrix die Matrix, welche die Gitterbasis als Spalten hat.

Lemma 2.10. *Eine Matrix $\Pi \in Mat_{g \times 2g}(\mathbb{C})$ ist genau dann die Periodenmatrix eines komplexen Torus, wenn die Matrix $P := \begin{pmatrix} \Pi \\ \overline{\Pi} \end{pmatrix}$ invertierbar ist. $\overline{\Pi}$ bezeichnet hierbei die eintragsweise komplex konjugierte Matrix.*

Beweis. Π ist Periodenmatrix, falls ihre Spalten $\mathbb{R}$-linear unabhängig sind. Das bedeutet, per Definition, dass, für $x \in \mathbb{R}^{2g}$, gilt $\Pi x = 0 \Rightarrow x = 0$. Angenommen die Spalten von Π

sind $\mathbb{R}$-linear abhängig. Dann existiert ein $0 \neq x \in \mathbb{R}^{2g} \cap ker(\Pi)$. Daraus folgt $\Pi x = 0$ und $\overline{\Pi}x = \overline{\Pi}\overline{x} = \overline{\Pi x} = \overline{0} = 0$, also $x \in ker(P)$. P ist also nicht invertierbar.
Sei umgekehrt P nicht invertierbar. Dann existiert ein $0 \neq x + iy \in \mathbb{C}^g$ mit $\Pi(x + iy) = 0 = \overline{\Pi}(x+iy)$. Aus $0 = \overline{\Pi}(x+iy) = \overline{\Pi(x-iy)}$ folgt auch $0+0 = \Pi(x+iy+x-iy) = 2\Pi x$ und $0 = i\Pi(x + iy - (x - iy)) = -2\Pi y$, also $x, y \in ker(\Pi) \cap \mathbb{R}^{2g}$. Da $x \neq 0$ oder $y \neq 0$, folgt hieraus, dass Π keine $\mathbb{R}$-linear unabhängigen Spalten hat. □

Nun untersuchen wir holomorphe Abbildungen zwischen komplexen Tori.

Definition 2.11. *Seien X_1, X_2 komplexe Tori. Wir nennen eine holomorphe Abbildung $f : X_1 \to X_2$ einen* ***Homomorphismus*** *(von Lie-Gruppen), wenn sie zusätzlich ein Gruppenhomomorphismus ist.*

Für ein $x_0 \in X$ nennen wir die Abbildung $t_{x_0} : X \to X$, $z \mapsto z + x_0$ eine **Translation**.

Satz 2.12. *Seien $X = V/\Gamma$ und $X' = V'/\Gamma'$ komplexe Tori und sei $h : X \to X'$ eine holomorphe Abbildung. Seien π bzw. π' die zugehörigen Projektionen (etwa $\pi : V \to V/\Gamma$, $v \mapsto v + \Gamma$).*

a) Die Abbildung $f := t_{-h(0)} \circ h$ ist ein Homomorphismus mit $h(x) = f(x) + h(0)$

b) Es gibt genau eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $F : V \to V'$ mit $\pi' \circ F = f \circ \pi$. Sie erfüllt $F(\Gamma) \subseteq \Gamma'$.

Beweis. Wir betrachten das Diagramm:
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & V' \arrow[d, "\pi'"] \\ X \arrow[r, "f"] & X' \end{tikzcd}$$
Da V' eine universelle Überlagerung von X' ist, lässt sich die Abbildung $f \circ \pi$ eindeutig zu einer stetigen Abbildung $F : V \to V'$ mit $F(0) = 0$ und $\pi' \circ F = f \circ \pi$ heben (vgl. [Top, Seite 160]). Da π', eingeschränkt auf genügend kleine offene Mengen, eine Parametrisierung für X darstellt, ist F selbst wieder holomorph. Da $f \circ \pi(v + \lambda) = f \circ \pi(v)$ für alle $\lambda \in \Gamma$ gilt, folgt auch $F(v + \lambda) - F(v) \in ker(\pi') = \Gamma'$. Deswegen ist die stetige Abbildung $V \to \Gamma'$ $v \mapsto F(v + \lambda) - F(v)$ konstant (da Γ' diskret ist). Zusammen mit $F(0) = 0$ folgt hiermit, dass $F(v + \lambda) = F(v) + F(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Gamma, v \in V$. Somit sind alle partiellen Ableitungen von F 2g-fach periodisch, und nach dem ersten Satz von Liouville (vgl. [F1, Seite 258]) konstant. Daher ist F affin linear, und aus $F(0) = 0$ folgt somit, dass F $\mathbb{C}$-linear und f ein Homomorphismus ist. □

Definition 2.13. *Mit der Notation oben nennen wir F die zu f* ***assoziierte Abbildung****.*

3 Das Periodengebiet aller Tori

In diesem Abschnitt wollen wir die Menge aller komplexen Tori bis auf Isomorphie parametrisieren. Dazu definieren wir die Grassmann'sche Mannigfaltigkeit, und zeigen zunächst, dass diese tatsächlich eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Dann wählen wir eine Teilmenge der Grassmann'schen, und ordnen jedem ihrer Elemente einen komplexen Torus zu. Andersherum können wir jedem Torus V/Γ, nach Wahl einer Basis von Γ, mit seinen Periodenmatrizen eindeutig ein Element der Grassmann'schen zuordnen.

3.1 Die Grassmann'sche

Definition 3.1. *Wir definieren $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ als Menge aller k-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{C}^n$, und nennen es die **Grassmann'sche Mannigfaltigkeit**.*
*Weiterhin definieren wir $St(k,n) := \{A \in Mat_{k\times n}(\mathbb{C}) |\ Rang(A) = k\}$ als die **Stiefel Mannigfaltigkeit**.*

Zunächst finden wir eine Topologie auf $Gr_k(\mathbb{C}^n)$. Wir bemerken, dass $Mat_{k\times n}(\mathbb{C}) \setminus St(k,n)$ durch das verschwinden aller $k \times k$-Minoren gegeben ist, und deswegen abgeschlossen ist. Daher ist $St(k,n)$ offen als Teilmenge von $Mat_{k\times n}(\mathbb{C})$. Sei nun $U \in Gr_k(\mathbb{C}^n)$ beliebig und sei $B = (v_1, \dots, v_k)$ eine Basis von U, $v_i = (v_i^1, \dots, v_i^n)$. Dann ist
$A_B := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ v_k^1 & \dots & v_k^n \end{pmatrix} \in St(k,n)$. Andererseits können wir jedem Element von $St(k,n)$ einen k-dimensionalen Untervektorraum von $\mathbb{C}^n$ zuordnen, indem wir das Erzeugnis seiner Zeilen betrachten. Zwei Matrizen $A_1, A_2 \in Gr_k(\mathbb{C}^n)$ beschreiben genau dann den selben Untervektorraum von $\mathbb{C}^n$, falls eine Basiswechselmatrix $G \in Gl_k(\mathbb{C})$ existiert, mit $A_1 = GA_2$. Die Abbildung $Gl_k(\mathbb{C}) \times St(k,n) \to St(k,n),\ (G,A) \mapsto GA$ ist offensichtlich eine stetige Gruppenwirkung. Wie wir oben gesehen haben, existiert eine bijektive Abbildung zwischen $St(k,n)/Gl_k(\mathbb{C})$ und $Gr_k(\mathbb{C}^n)$, sie ist gegeben durch $[S] \mapsto Bild(S^T)$. Indem wir $St(k,n)/Gl_k(\mathbb{C})$ mit der Quotiententopologie ausstatten(vgl. [Top, Seite 31]), induziert diese Abbildung eine Topologie auf $Gr_k(\mathbb{C}^n)$. Ab sofort bezeichnet $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ den topologischen Raum mit der soeben definierten Topologie, und wir identifizieren $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ mit $St(k,n)/Gl_k(\mathbb{C})$.
Für eine komplexe Mannigfaltigkeit benötigen wir einen Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis. Die Existenz einer abzählbaren Basis folgt sofort daraus, dass $St(k,n)$ als Teilmenge von $Mat_{k\times n}(\mathbb{C})$ eine abzählbare Basis besitzt, und daraus, dass die Projektionsabbildung, wie wir gleich sehen werden, offen ist. Der Beweis der Hausdorff-Eigenschaft ist etwas aufwendiger.
Wir definieren zunächst die Menge aller **Multiindizes**
$I_{k,n} := \{I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$. Sei $A \in St(k,n)$ beliebig. Dann besitzt A mindestens eine invertierbare $k \times k$-Untermatrix, d.h. es existiert ein $I \in I_{k,n}$ mit $A_I := \begin{pmatrix} a_{1i_1} & \dots & a_{1i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ki_1} & \dots & a_{ki_k} \end{pmatrix} \in Gl_k(\mathbb{C})$. Sei $P_I \in Gl_n(\mathbb{C})$ eine Permuta-

tionsmatrix, welche diese k Spalten mit den ersten k Spalten vertauscht, also $AP_I = (A_I|\tilde{A}_I)$, $\tilde{A}_I \in Mat_{k\times n-k}(\mathbb{C})$. Wir definieren $V_I := \{A \in St(k,n) \mid A_I \in Gl_k(\mathbb{C})\}$. Die l-te Spalte von GA hängt nur von der l-ten Spalte von A ab, aber nicht von den Anderen. Daher gilt für alle $G \in Gl_k(\mathbb{C})$ und alle $A \in St(k,n)$: $(GA)_I = GA_I$ und $\widetilde{(GA)}_I = G(\tilde{A}_I)$. Insbesondere ist also V_I invariant unter Multiplikation mit $Gl_k(\mathbb{C})$. Für $\pi : St(k,n) \to St(k,n)/Gl_k(\mathbb{C}),\ A \mapsto [A]$ folgt somit: $\pi^{-1}\pi(V_I) = V_I$.

Lemma 3.2. *Es gilt:*

1) *Für $G \in Gl_k(\mathbb{C})$ ist die Abbildung $A \mapsto GA$ ein Homöomorphismus auf $St(k,n)$.*

2) *Die kanonische Projektion $\pi : St(k,n) \to St(k,n)/Gl_k(\mathbb{C})$ ist offen.*

3) *Die Mengen $U_I := \pi(V_I)$ sind eine offene Überdeckung von $Gr_k(\mathbb{C}^n) = St(k,n)/Gl_k(\mathbb{C})$.*

4) *Jedes $U \in U_1 := U_{(1,\ldots,k)}$ besitzt einen eindeutigen Repräsentanten der Form $(E_k|B)$.*

Beweis. 1) Die Stetigkeit ist klar. Die Inverse ist gegeben durch $A \mapsto G^{-1}A$.

2) Sei $U \subseteq St(k,n)$ offen. Per Definition der Quotiententopologie, ist $\pi(U)$ offen, genau dann wenn $\pi^{-1}\pi(U)$ offen ist. Allerdings ist $\pi^{-1}\pi(U) = \bigcup_{g\in Gl_k(\mathbb{C})} gU$. Da die Multiplikation mit g ein Homöomorphismus ist, sind alle Mengen gU offen, und somit ist $\pi^{-1}\pi(U)$ offen als Vereinigung offener Mengen.

3) Die Mengen V_I sind durch das Nichtverschwinden eines $k\times k$-Minoren gegeben, und somit offen. Mit 2) folgt dann, dass die U_I offen sind. Außerdem haben wir bereits oben gesehen, dass jedes Element von $St(k,n)$ in mindestens einer Menge V_I liegt.

4) Sei $U = [(A|\tilde{A})] \in U_1$ beliebig. Nach Voraussetzung ist A invertierbar, also ist auch $A^{-1}(A|\tilde{A}) = (E_k|A^{-1}\tilde{A})$ ein Repräsentant von U. Seien $(E_k|A)$ und $(E_k|B)$ zwei Repräsentanten von U. Dann existiert ein $g \in Gl_k(\mathbb{C})$ mit $(E_k|A) = g(E_k|B)$. Insbesondere gilt also $gE_k = E_k$ woraus $g = E_k$ folgt, und damit auch $A = B$.

□

Lemma 3.3. *Sei $O \subseteq Mat_{n-k\times k}(\mathbb{C})$ offen.*
Dann ist die Menge $[(E_k|O)] := \{[(E_k|o)] \in Gr_k(\mathbb{C}^n) \mid o \in O\}$ ebenfalls offen.

Beweis. Sei $O \subseteq Mat_{n-k\times k}(\mathbb{C})$ offen. Wir betrachten die Abbildung:

$$\begin{aligned} \varphi : U_1 &\to Mat_{k\times n-k}(\mathbb{C}) \\ [(E_k|A)] &\mapsto A \end{aligned}$$

Nach obigem Lemma ist diese Abbildung wohldefiniert, und $[E_k|O] = \varphi^{-1}(O)$. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass sie stetig ist. Per Definition der Quotiententopologie ist diese genau dann stetig, wenn $\varphi \circ \pi : V_1 \to Mat_{n-k\times k}(\mathbb{C})$ stetig ist. Diese Abbildung ist aber gegeben durch $\varphi \circ \pi(A|B) = A^{-1}B$, und somit stetig. □

Nun können wir beweisen, dass $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ ein Hausdorff-Raum ist.

Satz 3.4. *$Gr_k(\mathbb{C}^n)$ ist ein Hausdorff-Raum.*

Beweis. Seien $U \neq V \in Gr_k(\mathbb{C}^n)$ gegeben. Wir betrachten zuerst den Fall, dass U und V in der selben Menge U_I liegen. Nach Umnummerierung der Spalten können wir annehmen, dass $U_I = U_1 = U_{(1,\dots,k)}$ ist. Sei $U = [(E_k|A)]$ und $V = [(E_k|B)]$. Da $Mat_{n-k\times k}(\mathbb{C})$ hausdorff'sch ist, existieren offene Mengen $O_1, O_2 \subseteq Mat_{n-k\times k}(\mathbb{C})$ mit $A \in O_1$, $B \in O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Dann sind die Mengen $[(E_k|O_1)]$ und $[(E_k|O_2)]$ disjunkte, offene Umgebungen von U bzw. V.
Betrachten wir nun den anderen Fall, d.h. $U \in U_1 \setminus U_I$ und $V \in U_I \setminus U_1$ für ein $I \in I_{k,n}$. Sei s die Anzahl linear unabhängiger Spalten in den ersten k Spalten eines Repräsentanten von V, d.h. für $V = [(A|B)]$ ist $s = Rang A$. Nach möglicher Umnummerierung der Spalten können wir eindeutige Repräsentanten von U und V finden mit $U = \left[\begin{pmatrix} E_s & 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & E_{k-s} & \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}\right]$ und $V = \left[\begin{pmatrix} E_s & \gamma_1 & 0 & \xi_1 \\ 0 & \gamma_2 & E_{k-s} & \xi_2 \end{pmatrix}\right]$. Seien nun $\tilde{U} = \left[\begin{pmatrix} E_s & 0 & \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\beta}_1 \\ 0 & E_{k-s} & \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix}\right]$ und $\tilde{V} = \left[\begin{pmatrix} E_s & \tilde{\gamma}_1 & 0 & \tilde{\xi}_1 \\ 0 & \tilde{\gamma}_2 & E_{k-s} & \tilde{\xi}_2 \end{pmatrix}\right]$ beliebige Elemente, welche eine solche Darstellung besitzen. Angenommen $\tilde{U} = \tilde{V}$, dann existiert ein $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl_k(\mathbb{C})$ mit $a \in Mat_{s\times s}(\mathbb{C}), b \in Mat_{s\times k-s}(\mathbb{C}), c \in Mat_{k-s\times s}(\mathbb{C}), d \in Mat_{k-s\times k-s}(\mathbb{C})$ und $\begin{pmatrix} E_s & 0 & \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\beta}_1 \\ 0 & E_{k-s} & \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} E_s & \tilde{\gamma}_1 & 0 & \tilde{\xi}_1 \\ 0 & \tilde{\gamma}_2 & E_{k-s} & \tilde{\xi}_2 \end{pmatrix}$. Aus $g \begin{pmatrix} E_s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $a = E_s$ und $c = 0$. Weiterhin folgt aus

$$\begin{pmatrix} E_s & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1 \\ \tilde{\gamma}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1 + b\tilde{\gamma}_2 \\ d\tilde{\gamma}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{k-s} \end{pmatrix},$$

dass $\tilde{\gamma}_2$ invertierbar ist mit $\tilde{\gamma}_2^{-1} = d$. Damit erhalten wir aus der Bedingung

$$\begin{pmatrix} E_s & b \\ 0 & \tilde{\gamma}_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ E_{k-s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \tilde{\gamma}_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \end{pmatrix},$$

dass $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\gamma}_2^{-1}$. Definieren wir nun

$$H := \left\{ \alpha \in Mat_{k-s\times k-s}(\mathbb{C}) | \, |\det(\alpha)| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Dann haben wir soeben bewiesen, dass die Mengen
$\left[\begin{pmatrix} E_s & 0 & Mat_{s\times k-s}(\mathbb{C}) & Mat_{s\times n-k-(k-s)}(\mathbb{C}) \\ 0 & E_{k-s} & H & Mat_{k-s\times n-k-(k-s)}(\mathbb{C}) \end{pmatrix}\right]$ und
$\left[\begin{pmatrix} E_s & Mat_{s\times k-s}(\mathbb{C}) & 0 & Mat_{s\times n-k-(k-s)}(\mathbb{C}) \\ 0 & H & E_{k-s} & Mat_{k-s\times n-k-(k-s)}(\mathbb{C}) \end{pmatrix}\right]$ disjunkt sind. Nach Lemma (3.3)

sind sie auch offen. □

Kommen wir nun zur komplexen Struktur:
In Lemma (3.2) haben wir gesehen, dass $(U_I)_{I\in I_{k,n}}$ eine offene Überdeckung von $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ ist. Außerdem sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} X_I : U_I &\rightarrow Mat_{k\times n-k}(\mathbb{C}) \\ [(A_I|\tilde{A}_I)P_I^{-1}] &\mapsto A_I^{-1}\tilde{A}_I \end{aligned}$$

für alle $I \in I_{k,n}$ stetig, denn $X_I \circ \pi : V_I \rightarrow Mat_{k\times n-k}(\mathbb{C})$ ist gegeben durch $A \mapsto A_I^{-1}\tilde{A}_I$ und das invertieren einer Matrix ist eine stetige Funktion. An dieser Stelle sollte bemerkt werden, dass die Wahl von P_I nicht eindeutig ist, allerdings liefern uns verschiedene Wahlen von P_I äquivalente komplexe Atlanten, da eine Vertauschung von Spalten eine biholomorphe Abbildung in $Mat_{k\times n-k}(\mathbb{C})$ ist.
Damit die Menge $(U_I, X_I)_{I\in I_{k,n}}$ ein komplexer Atlas ist, muss nur noch gezeigt werden, dass die Kartenwechselabbildungen $X_J \circ X_I^{-1}$ holomorph sind. Sei $A \in X_I(U_I \cap U_J) \subseteq Mat_{k\times n-k}(\mathbb{C})$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} X_J(X_I^{-1}(A)) &= X_J([(E_k|A)P_I^{-1}]) \\ &= X_J([(E_k|A)P_I^{-1}P_JP_J^{-1}]) \\ &= ((E_k|A)P_I^{-1}P_J)_J^{-1})((E_k|\widetilde{A)P_I^{-1}}P_J)_J \end{aligned}$$

ein Polynom in den Koeffizienten von A, und somit holomorph. Somit haben wir $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit verliehen.
Wir werden nun noch eine weitere Charakterisierung der Grassmann'schen im Fall $k = g$ und $n = 2g$ angeben. Wir betrachten für ein $U \in Gr_g(\mathbb{C}^{2g})$ die lineare Abbildung $z_U : \mathbb{C}^{2g} \rightarrow \mathbb{C}^{2g}/U$ gegeben durch $z(v) = v + U$. Wenn wir eine Basis von $V := \mathbb{C}^{2g}/U$ wählen, ist die Darstellungsmatrix von z_U ein Element von $Mat_{g\times 2g}(\mathbb{C})$. Nach der Transformationsformel für Basiswechsel (vgl. [LA, Seite 158]) gehören zwei Matrizen A, A' genau dann zur selben Abbildung z_U, falls eine Basiswechselmatrix $g \in Gl_g(\mathbb{C})$ existiert mit $A = gA'$. Somit können wir die Menge $\{z_U : \mathbb{C}^{2g} \rightarrow \mathbb{C}^{2g}/U |\ U \in Gr_g(\mathbb{C}^{2g})\}$ auch mit $St(g, 2g)/Gl_g(\mathbb{C})$ und somit mit der Grassmann'schen identifizieren. Allerdings ist die Abbildung $U \rightarrow z_U$ nicht die Identität.

Satz 3.5. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} St(g, 2g)/Gl_g(\mathbb{C}) &\rightarrow St(g, 2g)/Gl_g(\mathbb{C}) \\ U &\mapsto z_U \end{aligned}$$

ist biholomorph.

Beweis. Sei $U = [A] \in St(g,2g)/Gl_g(\mathbb{C})$ beliebig. Wir können, nach Umnummerierung der Spalten, annehmen, dass $U \in U_1$, also $U = [(E_g|A)]$. Definieren wir den Vektorraum $V := Span_{\mathbb{C}}(e_{g+1}, \dots, e_{g+g})$, e_i ist der i-te Einheitsvektor, dann gilt $U \oplus V = \mathbb{C}^{2g}$. Damit ist $(e_{g+1} + U, \dots, e_{g+g} + U)$ eine Basis von $\mathbb{C}^{2g}/U$. Sei $A = (a_{ij})$, dann gilt

$$\begin{aligned} e_i &= \underbrace{e_i + \sum_{j=1}^{g} a_{ij} e_{g+j}}_{\in U} - \sum_{j=1}^{g} a_{ij} e_{g+j} \quad 1 \le i \le g \quad \text{und} \\ e_j &= e_j \quad g+1 \le j \le g+g. \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} z_U(e_i) &= -a_{i1}(e_{g+1} + U) - \dots - a_{ig}(e_{g+g} + U) \quad 1 \le i \le g \text{ und} \\ z_U(e_{g+i}) &= e_{g+i} + U \quad g+1 \le g+i \le g+g. \end{aligned}$$

Bezüglich der Basis $(e_{g+1}+U, \dots, e_{g+g}+U)$ ist z_U also gegeben durch die Matrix $(-A^T|E_g)$. Wenn wir die Abbildung $U \mapsto z_U$ mit den richtigen Karten verknüpfen, erhalten wir somit die Abbildung $A \mapsto -A^T$, was offenbar biholomorph ist. □

Sei $U = [A] \in Gr_g(\mathbb{C}^{2g})$ und $z_U = [B]$. Dann gilt $U = Bild(A^T) = ker(B)$. Wir definieren $\bar{U} := \{\bar{u} \in \mathbb{C}^{2g} |\ u \in U\}$ als das komplex Konjugierte von U. Sei $(v_1, \dots, v_g)$ eine Basis von U, dann ist $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_g)$ eine Basis von $\bar{U}$, es gilt somit $\overline{[A]} = [\bar{A}]$. Analog definieren wir $\overline{z_U} := z_{\bar{U}}$. Aus dem Beweis von Satz (3.5) folgt, dass dies ebenfalls durch komplexes Konjugieren der Darstellungsmatrix erfolgt.
Sei $B_g := \{[A] \in Gr_g(\mathbb{C}^{2g}) |\ \det \begin{pmatrix} A \\ \bar{A} \end{pmatrix} \neq 0\}$. Die Bedingung

$$\det \begin{pmatrix} A \\ \bar{A} \end{pmatrix} = \det(A^T|\bar{A}^T) \neq 0$$

bedeutet $Bild(A^T) \oplus Bild(\bar{A}^T) = \mathbb{C}^{2g}$, und ist somit unabhängig von der Wahl des Repräsentanten. Für ein Element $U = [(E_g|A)P_I^{-1}] \in Gr_g(\mathbb{C}^{2g})$ ist $U \in B_g \Leftrightarrow \det(ImA) \neq 0$, und somit ist B_g nach Lemma (3.3) offen.

3.2 Das Periodengebiet aller Tori

Lemma 3.6. *Es ist $z_U = [B] \in B_g$ genau dann wenn $z_{U|\mathbb{R}^{2g}} : \mathbb{R}^{2g} \to \mathbb{C}^{2g}/U$ ein $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus ist.*

Beweis. Der Beweis ist sehr ähnlich zum Beweis von Lemma (2.10).
Sei zunächst $z_U \in B_g$. $z_{U|\mathbb{R}^{2g}}$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $ker(z_{U|\mathbb{R}^{2g}}) = U \cap \mathbb{R}^{2g} = \{0\}$. Sei also $x \in U \cap \mathbb{R}^{2g}$, dann ist auch $x = \bar{x} \in \bar{U} \cap \mathbb{R}^{2g} \subseteq ker(z_{\bar{U}}) = ker(\bar{A})$.

Daraus folgt auch $x \in ker \begin{pmatrix} A \\ \bar{A} \end{pmatrix} = \{0\}$, also $x = 0$.

Sei andererseits $z_{U|\mathbb{R}^{2g}}$ ein Isomorphismus und sei $x \in ker \begin{pmatrix} A \\ \bar{A} \end{pmatrix} = U \cap \bar{U}$. Dann existieren $u_1, u_2 \in U$ mit $u_1 = \overline{u_2} = x$, und somit ist $2Re(u_2) = u_2 + \overline{u_2} = u_1 + u_2 \in U \cap \mathbb{R}^{2g} = \{0\}$. Da U sogar ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, ist auch $i(u_1 - u_2) = 2Im(u_2) \in U \cap \mathbb{R}^{2g} = \{0\}$, also $Im(u_2) = 0$. Daraus folgt $0 = u_2 = \overline{u_2} = x$, was zu zeigen war. □

Für jedes $[B] = z_U \in B_g$ ist also $z_U(\mathbb{Z}^{2g})$ ein Gitter in $V := \mathbb{C}^{2g}/U$, und $X_{z_U} := V/z_U(\mathbb{Z}^{2g})$ ein g-dimensionaler komplexer Torus mit Periodenmatrix B. Andererseits können wir jedem g-dimensionalem komplexem Torus eine Periodenmatrix zuordnen, und nach Lemma (2.10) ist diese ein Element von B_g.

Korollar 3.7. *Jeder komplexe Torus ist (isomorph zu einem Torus) von der Form X_z für ein $z \in B_g$. Wir nennen B_g das* ***Periodengebiet aller Tori*** *der Dimension g.*

Die Interpretation eines Torus als Element von B_g ist leider nicht eindeutig: Es kann passieren, dass $X_{z_1} \cong X_{z_2}$, obwohl $z_1 \neq z_2$ in B_g gilt. Wir haben allerdings Folgendes:

Satz 3.8. *Seien $z_1, z_2 \in B_g$. Die Tori X_{z_1}, X_{z_2} sind genau dann Isomorph (als Lie-Gruppen) , falls ein $M \in Gl_{2g}(\mathbb{Z})$ existiert, mit $z_1 = z_2 M$.*

Beweis. Wir verweisen auf den Beweis von Lemma (4.12), welcher unter anderem auch diesen Satz beweist. □

4 Das Periodengebiet aller polarisierten Tori vom Index k

In diesem Kapitel möchten wir die Menge aller polarisierten Tori vom Index k parametrisieren. Dazu betrachten wir die Menge aller komplexen Strukturen auf $\mathbb{R}^{2g}$ und ordnen jeder von ihr einen komplexen Torus zu. Dann untersuchen wir, wann ein solcher Torus ein Polarisierung vom Index k zulässt. Zum Schluss geben wir der Menge aller solcher komplexen Strukturen die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit.

4.1 Polarisierte Tori als komplexe Strukturen

Sei $J \in End(\mathbb{R}^{2g})$ eine komplexe Struktur auf $\mathbb{R}^{2g}$, d.h. $J \circ J = -Id$. Dann ist das Tupel (R^{2g}, J) ein g-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, und $\mathbb{Z}^{2g}$ ist ein Gitter auf diesem. $X_J := (\mathbb{R}^{2g}, J)/\mathbb{Z}^{2g}$ ist also ein komplexer Torus. Die Periodenmatrix dieses Torus ist gegeben als die Matrix Π, mit der das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{2g} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "J"] & \mathbb{C}^g \arrow[d, "iId"] \\
R^{2g} \arrow[r, "\Pi"] & \mathbb{C}^g
\end{tikzcd}$$

Sei V ein g-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und Γ ein Gitter auf V.

Definition 4.1. *Sei H eine nicht-ausgeartete hermitesche Form auf V. Wir nennen H eine* ***Polarisierung vom Index k****, falls gilt:*

- $ind(H) = k$.
- *Der alternierende Anteil $A := ImH$ von H nimmt auf $\Gamma \times \Gamma$ nur ganze Zahlen an.*

Wir nennen ein Paar $(V/\Gamma, H)$ einen ***polarisierten Torus vom Index*** *k.*
Im Fall $k = 0$ oder $k = g$ nennen wir das Paar $(V/\Gamma, H)$ auch eine ***polarisierte abelsche Varietät****.*

Definition 4.2. *Seien $(X, H), (X', H')$ zwei polarisierte Tori vom Index k, sei $f : X \to X'$ ein Isomorphismus und sei $F : V \to V'$ die zu f assoziierte Abbildung (vgl. Def.(2.13)). Wir nennen f einen* ***Isomorphismus von polarisierten Tori****, falls f die Polarisierung erhält, d.h. $H(v, w) = H'(F(v), F(w)),\ v, w \in V$.*

Die hermitesche Form H lässt sich aus ihrem alternierendem Anteil $A := ImH$ zurückgewinnen:

Lemma 4.3. *Es gilt $H(z, w) = A(iz, w) + iA(z, w)$ und $A(iz, w) = A(iw, z)$.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} A(iz,w) + iA(z,w) &= ImH(iz,w) + iImH(z,w) \\ &= ImiH(z,w) + iImH(z,w) \\ &= ReH(z,w) + iImH(z,w) = H(z,w). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A(iz,w) &= H(z,w) - iA(z,w) = H(z,w) - iImH(z,w) \\ &= ReH(z,w) = Re\overline{H(w,z)} = ReH(w,z) \\ &= H(w,z) - iImH(w,z) = A(iw,z). \end{aligned}$$

□

Es ist möglich, die Basis des Gitters Γ so zu wählen, dass die Darstellungsmatrix von A eine besonders einfache Form hat.

Definition 4.4. *Sei D eine Diagonalmatrix mit ganzzahligen, von null verschiedenen Einträgen $t_1, \dots, t_n$. Wir nennen D* ***Elementarteilermatrix****, falls gilt: t_s teilt t_{s+1} für alle $1 \leq s < n$.*

Satz 4.5. *[F2, Seite 394] Sei V ein $m = 2n$-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei $\Gamma \subseteq V$ ein Gitter und sei*

$$A : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{Z},$$

eine nicht ausgeartete alternierende Bilinearform über $\mathbb{Z}$ d.h.
a) $A(a+b,c) = A(a,c) + A(b,c)$,
b) $A(a,b) = -A(b,a)$,
c) $A(a,x) = 0 \ \forall x \in \Gamma \Rightarrow a = 0$.
Dann existiert eine Gitterbasis $B = (\omega_1, \dots, \omega_{2n})$ von Γ mit

$$A(\omega_i, \omega_j) = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}_{i,j} \quad \forall\ 1 \leq i,j \leq n$$

wobei D eine Elementarteilermatrix ist.

Beweis. Wir führen eine Induktion nach m durch, wobei der Fall $m = 1$ mit dem Beweis des allgemeinen Falls auch bewiesen wird. Für $m > 0$ zerlegen wir unser Gitter in

$$\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \oplus \Gamma',$$

wobei gelten soll
1) $A(\omega_i, \omega_j) = \begin{pmatrix} 0 & t_1 \\ -t_1 & 0 \end{pmatrix}_{i,j}$ für i, j$\in \{1,2\}$

2) Die Einschränkung von A auf Γ' ist nicht ausgeartet und es gilt

$$A(\omega_i, z) = 0 \qquad \forall z \in \Gamma'$$

3) t_1 teilt $A(x, y)$ für alle $x, y \in \Gamma'$.
Wenn wir das schaffen, können wir auf Γ' die Induktionsannahme anwenden und erhalten eine Zerlegung

$$\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\omega_{2n} \qquad .$$

Ordnen wir die ω_i in der Reihenfolge $\omega_1, \omega_3, \ldots \omega_{2n-1}, \omega_2, \omega_4 \ldots \omega_{2n}$ hat die darstellende Matrix von A bezüglich dieser Basis die gewünschte Form, es gilt nämlich:

$$A(\omega_i, \omega_j) = \begin{cases} t_k & \text{falls } \omega_i = 2k, w_j = 2k+1 \text{ für ein } 1 \leq k < n \\ -t_k & \text{falls } \omega_j = 2k, w_i = 2k+1 \text{ für ein } 1 \leq k < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da A nach $\mathbb{Z}$ abbildet und nicht konstant Null ist, können wir zwei Vektoren ω_1, ω_2 so wählen, dass $t_1 := A(\omega_1, \omega_2) = -A(\omega_2, \omega_1)$ echt größer als Null und unter dieser Bedingung minimal ist. Wir definieren

$$\Gamma' := \{x \in \Gamma | A(\omega_1, x) = A(\omega_2, x) = 0\}$$

$\Gamma', \omega_1\mathbb{Z}, \omega_2\mathbb{Z}$ schneiden sich paarweise nur in der Null. Ihre direkte Summe ist also wohldefiniert. Betrachten wir nun die Gruppenhomomorphismen

$$\varphi_1, \varphi_2 \ : \Gamma \to \mathbb{Z}$$

mit $\varphi_1(x) := A(\omega_1, x)$ und $\varphi_2(x) := A(\omega_2, x)$. Ihre Bilder sind Untergruppen von $\mathbb{Z}$ und somit zyklisch [Bo, Seite 21]. Da t_1 nach Konstruktion das vom Betrag her kleinste Element der Bilder ist, ist es ihr Erzeuger. Alle Elemente sind also ganzzahlige Vielfache von t_1. Somit sind $\frac{A(\omega_1,x)}{t_1}$ und $\frac{A(\omega_2,x)}{t_2}$ ganze Zahlen. Für ein beliebiges $x \in \Gamma$ betrachten wir

$$x' := x - \frac{A(\omega_2, x)}{t_1}\omega_1 - \frac{A(\omega_1, x)}{t_1}\omega_2.$$

x' liegt in Γ', denn

$$A(\omega_1, x') = A(\omega_1, x) - \frac{A(\omega_2, x)}{t_1} \underbrace{A(\omega_1, \omega_1)}_{=0} - \frac{A(\omega_1, x)}{t_1} \underbrace{A(\omega_1, \omega_2)}_{=t_1} = 0.$$

$A(\omega_2, x') = 0$ folgt analog.
Das heißt, für jedes $x \in \Gamma$ existieren ganze Zahlen $z_1 (= \frac{A(\omega_2,x)}{t_1})$, z_2 mit

$x = x' + z_1\omega_1 + z_2\omega_2$. Das bedeutet, dass gilt

$$\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \oplus \Gamma'$$

Wir müssen nun noch die Bedingungen 1), 2) und 3) nachprüfen:
1) Folgt nach Definition von t_1 und der Tatsache, dass A alternierend ist, und deswegen $A(\omega_i, \omega_i) = 0$ und $A(\omega_1, \omega_2) = -A(\omega_2, \omega_1)$ gilt.
2)$A(\omega_i, z) = 0\ \forall z \in \Gamma'$ gilt nach Definition von Γ'. Gäbe es ein $x \in \Gamma' - \{0\}$ mit $A(x, z') = 0\ \forall z' \in \Gamma'$, dann würde für jedes beliebige $z = z' + z_1\omega_1 + z_2\omega_2 \in \Gamma$ gelten :

$$A(x, z' + z_1\omega_1 + z_2\omega_2) = A(x, z') + A(x, z_1\omega_1) + A(x, z_2\omega_2) = 0$$

A wäre also auf Γ ausgeartet, was es nach Voraussetzung nicht ist.
3) Angenommen es gäbe $x, y \in \Gamma'$, sodass $A(x, y)$ nicht von t_1 geteilt werden würde. Dann gäbe es ein $m \in \mathbb{Z}$ und ein $r \in \mathbb{Z}$ mit $0 < r < t_1$ mit $A(x, y) = mt_1 + r$. Dann gilt aber

$$A(-m\omega_1 + x, \omega_2 + y) = A(-m\omega_1, \omega_2) + 0 + 0 + A(x, y) = -mt_1 + A(x, y) = r < t_1,$$

im Widerspruch zur Minimalität von t_1. $\square$

Die Elementarteilermatrix D nennen wir auch den Typ von H. Eine Gitterbasis, bezüglich der A von der Form $I_D := \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$ ist, nennen wir eine **symplektische Basis** für A bzw. H. Die Menge

$$Sp_{2g}^D(\mathbb{R}) := \{M \in Gl_{2g}(\mathbb{R}) |\ M^T I_D M = I_D\}$$

nennen wir die **symplektische Gruppe**. Man überlegt sich leicht, dass dies tatsächlich eine Gruppe ist.

Lemma 4.6. *Für eine Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_{2g\times 2g}(\mathbb{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

- $M \in Sp_{2g}^D(\mathbb{R})$
- $a^T Dc = c^T Da$ *und* $b^T Dd = d^T Db$ *und* $a^T Dd - c^T Db = D$

Beweis.

$$\begin{aligned} M^T \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a^T & c^T \\ b^T & d^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Dc & Dd \\ -Da & -Db \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^T Dc - c^T Da & a^T Dd - c^T Db \\ b^T Dc - d^T Da & b^T Dd - d^T Db \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Bedingung „$M \in Sp_{2g}^D(\mathbb{R})$“ übersetzt sich also in die vier Bedingungen

- $a^T Dc = c^T Da$
- $a^T Dd - c^T Db = D$
- $b^T Dc - d^T Da = -D$
- $b^T Dd = d^T Db$

Die zweite und dritte Gleichung entstehen durch Transponieren auseinander, sie sind also äquivalent. □

Lemma 4.7. *Sei X_J ein Torus und H eine zugehörige Polarisierung vom Index k. Dann gilt:*

- *$J^T I_D$ ist symmetrisch*
- *$J \in Sp_{2g}^D(\mathbb{R})$*
- *$ind_{\mathbb{R}}(J^T I_D) = 2k$*

Beweis. Nach Lemma (4.3) gilt $ReH(z, w) = A(iz, w) = A(Jz, w)$. In Termen von Darstellungsmatrizen bedeutet dies, dass der Realteil von H bezüglich einer symplektischen Basis durch die Matrix $J^T I_D$ gegeben ist. Da H hermitesch ist, ist ReH symmetrisch, also ist auch $J^T I_D$ symmetrisch.

Aus obigem folgt:

$$J^T I_D J = I_D^T J^2 = (-I_D)(-E_g) = I_D,$$

also $J \in Sp_{2g}^D(\mathbb{R})$.

Da H den Index k hat, existieren $\mathbb{C}$-Vektorräume V_+, V_- mit

- $\dim_{\mathbb{C}} V_- = k$
- $H(v, v) > 0 \quad \forall v \in V_+$
- $H(v, v) < 0 \quad \forall v \in V_-$
- $\mathbb{C}^g = (R^{2g}, J) = V_+ \oplus V_-$

Der Vektorraum V_- ist als reeller Vektorraum $2k$-dimensional, und erfüllt $ReH(v, v) < 0 \ \forall v \in V_-$. In V_+ kann man analog argumentieren, also ist $ind_{\mathbb{R}}(ReH) = ind_{\mathbb{R}}(J^T I_D) = 2k$. □

Insbesondere ist der Index also eine Eigenschaft des Torus, und hängt nicht von der Wahl der Polarisierung ab.

Betrachten wir die Menge

$$C_k(Sp_{2g}^D(\mathbb{R})) := \{J \in Sp_{2g}^D(\mathbb{R}) |\ J^2 = -E_{2g},\ ind_{\mathbb{R}}(J^T I_D) = 2k\}.$$

Wir haben oben gesehen, dass jeder polarisierte Torus vom Index k und Typ D nach Wahl einer symplektischen Basis ein Element aus $C_k(Sp_{2g}^D(\mathbb{R}))$ definiert. Sei umgekehrt ein Element $J \in C_k(Sp_{2g}^D(\mathbb{R}))$ gegeben, dann ist $X_J := (\mathbb{R}^{2g}, J)/\mathbb{Z}^{2g}$ ein komplexer Torus.

Lemma 4.8. *Sei $J \in C_k(Sp_{2g}^D(\mathbb{R}))$. Die Abbildung H_J, gegeben durch*

$$H_J(v,w) := v^T J^T I_D w + i v^T I_D w,$$

ist eine Polarisierung vom Index k und Typ D für X_J und die Standardbasis ist eine symplektische Basis für H_J.

Beweis. H_J ist offensichtlich $\mathbb{R}$-bilinear, ihr Realteil ist symmetrisch und ihr Imaginärteil ist alternierend. H_J ist sesquilinear, da

$$H_J(iv,w) = H_J(Jv,w) = -v^T I_D w + i v^T J^T I_D w = i H_J(v,w),$$

und somit hermitesch. Sie ist nicht-ausgeartet und vom Index k, da ReH_J durch die Matrix $J^T I_D$ gegeben ist, welche nicht-ausgeartet und vom $Index$ $2k$ ist. □

Damit haben wir also bewiesen, dass die Menge aller Äquivalenzklassen von polarisierten komplexen Tori vom Index k und Typ D zusammen mit der Wahl einer symplektischen Basis durch $C_k(Sp_{2g}^D(\mathbb{R}))$ parametrisiert wird. Wir nennen $C_k(Sp_{2g}^D(\mathbb{R}))$ auch das **Periodengebiet** für Objekte dieser Art.
Betrachten wir nun die stetige Gruppenwirkung:

$$\begin{array}{rcl} Sp_{2g}^D(\mathbb{R}) \times C_k(Sp_{2g}^D(\mathbb{R})) & \to & C_k(Sp_{2g}^D(\mathbb{R})) \\ (M,J) & \mapsto & MJM^{-1} \end{array}$$

Diese ist wohldefiniert:

$$MJM^{-1}MJM^{-1} = MJJM^{-1} = M(-E_{2g})M^{-1} = -E_{2g}$$

und

$$(MJM^{-1})^T I_D = (M^{-1})^T J^T M^T I_D = (M^{-1})^T J^T I_D M^{-1},$$

die Identität $M^T I_D = I_D M^{-1}$ ist äquivalent zur definierenden Bedingung von $Sp^D_{2g}(\mathbb{R})$. $(MJM^{-1})^T I_D$ entspricht also einem Basiswechsel der Bilinearform $J^T I_D$, und hat somit den selben Index. Damit ist die Matrix MJM^{-1} ebenfalls in $Sp^D_{2g}(\mathbb{R})$ enthalten.
Sei $J_0 := \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$ mit $I_k := \begin{pmatrix} E_{g-k} & 0 \\ 0 & -E_k \end{pmatrix}$

Satz 4.9. *a) Die Gruppe $Sp^D_{2g}(\mathbb{R})$ wirkt transitiv auf $C_k(Sp^D_{2g}(\mathbb{R}))$.*

b) Der Stabilisator von J_0, also die Menge $\{M \in Sp^D_{2g}(\mathbb{R}) |\ MJ_0M^{-1} = J_0\}$, ist gegeben durch die Menge
$$Stab(J_0) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -I_k c I_k \\ c & I_k a I_k \end{pmatrix} \in Mat_{2g\times 2g}(\mathbb{C}) \middle| \begin{array}{c} a^T Dc = c^T Da \\ a^T DI_k a + c^T DI_k b = DI_k \end{array} \right\}$$

Beweis. a) Seien $J, J' \in C_k(Sp^D_{2g}(\mathbb{R}))$ und seien H_J, H'_J die dazugehörigen hermiteschen Formen auf den $\mathbb{C}$-Vektorräumen $V_J = (\mathbb{R}^{2g}, J)$ bzw. $V_{J'} = (\mathbb{R}^{2g}, J')$, wie oben definiert. Nach dem Satz zur Hauptachsentransformation (vgl. Satz 2.8) existieren $\mathbb{C}$-Basen $B = (v_1, \dots, v_g)$, $B' = (w_1, \dots, w_g)$ von V_J bzw. V'_J, sodass die Darstellungsmatrizen von H_J und $H_{J'}$ als Sesquilinearformen jeweils durch die Matrix I_k gegeben sind. Sei φ die eindeutig bestimmte, $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit $\varphi(v_i) = w_i \ \forall\ 1 \le i \le g$. Per Konstruktion erfüllt sie
$$H_J(v, w) = H_{J'}(\varphi(v), \varphi(w)) \quad \forall v, w \in V_J. \tag{1}$$

Sei M die Darstellungsmatrix von φ, interpretiert als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, bezüglich der Standardbasen $B = (e_1, \dots, e_{2g})$ von $\mathbb{R}^{2g}$. Da φ $\mathbb{C}$-linear ist, kommutiert M mit der Multiplikation mit i, welche bezüglich den Standardbasen jeweils durch die Matrizen J bzw. J' gegeben ist, d.h. $MJ = J'M$, was äquivalent zu $MJM^{-1} = J'$ ist.
Wir müssen nur noch zeigen, dass $M \in Sp^D_{2g}(\mathbb{R})$. Dazu bemerken wir, dass (1) auch für den Imaginärteil $Im(H_J)$ gilt, d.h.

$$ImH_J(v, w) = ImH_{J'}(\varphi(v), \varphi(w)) \quad \forall v, w \in V_J. \tag{2}$$

Weiterhin sind die Standardbasen symplektische Basen für H_J bzw. $H_{J'}$. Insgesamt haben wir also
$$I_D = (ImH_J(\cdot, \cdot))_B = (ImH_{J'}(\varphi(\cdot), \varphi(\cdot)))_B = M^T I_D M$$

was zu zeigen war.
b) Wir rechnen die Bedingung $MJ_0 = J_0M$ für Matrizen der Form $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nach.
Es gilt:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bI_k & aI_k \\ -dI_k & cI_k \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k c & I_k d \\ -I_k a & -I_k b \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also die Bedingungen

$$\begin{aligned} -bI_k &= I_k c && (3)\\ aI_k &= I_k d && (4)\\ dI_k &= I_k a && (5)\\ cI_k &= -I_k b && (6) \end{aligned}$$

(3) und (6) sowie (4) und (5) sind jeweils äquivalent zueinander, es bleiben also die Bedingungen

$$\begin{aligned} b &= -I_k c I_k && (7)\\ d &= I_k a I_k && (8) \end{aligned}$$

Für Matrizen dieser Form sind die ersten beiden Bedingungen aus Lemma (4.6) äquivalent zueinander, und die dritte wird zu:

$$\begin{aligned} a^T D I_k a I_k + c^T D I_k b I_k &= D\\ \Leftrightarrow a^T D I_k a + c^T D I_k b &= D I_k \end{aligned}$$

□

Lemma 4.10. *a) Die Abbildung*

$$\begin{aligned} Sp_{2g}(\mathbb{R}) := Sp_{2g}^{E_g}(\mathbb{R}) &\to Sp_{2g}^{D}(\mathbb{R})\\ M &\mapsto \begin{pmatrix} E_g & 0\\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} M \begin{pmatrix} E_g & 0\\ 0 & D \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von topologischen Gruppen.

b) Die Abbildung

$$\begin{aligned} Stab(J_0) &\to U_{g-k,k}(\mathbb{C})\\ \begin{pmatrix} a & -I_k c I_k\\ c & I_k a I_k \end{pmatrix} &\mapsto \sqrt{D} a \sqrt{D}^{-1} - i\sqrt{D} I_k c \sqrt{D}^{-1} \end{aligned}$$

ist homöomorph, wobei $U_{g-k,k}(\mathbb{C}) := \{M \in Mat_{g\times g}(\mathbb{C}) \mid \overline{M}^T I_k M = I_k\}$ *die unitäre Gruppe vom Index k ist, und* $\sqrt{D}$ *ist die Diagonalmatrix, welche jeweils die Wurzeln der Einträge von D als Diagonaleinträge hat.*

Aus diesem Lemma und dem Satz davor folgt sofort:

Korollar 4.11. $C_k(Sp_{2g}^D(\mathbb{R}))$ *ist homöomorph zu* $Sp_{2g}(\mathbb{R})/U_{g-k,k}(\mathbb{C})$ *und insbesondere unabhängig von D.*

Beweis des Lemmas. *a*) Wir zeigen, dass die Abbildung wohldefiniert ist. Sei $M \in Sp_{2g}(\mathbb{R})$. Wir machen zunächst eine Zwischenrechnung:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -D & 0 \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\right)^T I_D \begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} M^T \begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} M^T \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Rechnung, dass das Inverse dieser Abbildung auch wohldefiniert ist, läuft analog.
b) Da die Matrizen $\sqrt{D}$ und I_k invertierbar sind, lässt sich jede komplexe Matrix eindeutig in der Form $M = \sqrt{D}a\sqrt{D}^{-1} - i\sqrt{D}I_k c\sqrt{D}^{-1}$, mit reellen Matrizen a und c, schreiben. Wir müssen also nur die definierende Bedingung von $U_{g-k,k}(\mathbb{C})$ für Matrizen dieses Typs nachrechnen, wobei wir verwenden, dass $I_k I_k = E_g$ und $\sqrt{D}I_k = I_k\sqrt{D}$ gilt, da Diagonalmatrizen miteinander kommutieren.

$$(\sqrt{D}^{-1}a^T\sqrt{D} + i\sqrt{D}^{-1}c^T I_k\sqrt{D})I_k(\sqrt{D}a\sqrt{D}^{-1} - i\sqrt{D}I_k c\sqrt{D}^{-1})$$

Zur etwas besseren Lesbarkeit teilen wir diesen Term direkt in Real- und Imaginärteil auf. Für den Realteil gilt die Bedingung:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{D}^{-1}a^T\sqrt{D}I_k\sqrt{D}a\sqrt{D}^{-1} + \sqrt{D}^{-1}c^T I_k\sqrt{D}I_k\sqrt{D}I_k c\sqrt{D}^{-1} \\
= \;&\sqrt{D}^{-1}(a^T D I_k a + c^T D I_k c)\sqrt{D}^{-1} \overset{!}{=} I_k \\
\Leftrightarrow \;&a^T D I_k a + c^T D I_k c = \sqrt{D}I_k\sqrt{D} = DI_k
\end{aligned}$$

Für den Imaginärteil erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{D}^{-1} a^T \sqrt{D} I_k \sqrt{D} I_k c \sqrt{D}^{-1} + \sqrt{D}^{-1} c^T I_k \sqrt{D} I_k \sqrt{D} a \sqrt{D}^{-1} \\
= \; & \sqrt{D}^{-1} (a^T Dc + c^T Da) \sqrt{D}^{-1} \overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow \; & a^T Dc + c^T Da = 0
\end{aligned}$$

Die Bedingungen stimmen also mit denen überein, welche wir für $Stab(J_0)$ berechnet hatten. $\square$

Da $C_k(Sp^D_{2g}(\mathbb{R}))$ also unabhängig von D ist, werden wir uns von nun an nur noch auf den Fall $D = E_g$, bzw. $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R})) := C_k(Sp^{E_g}_{2g}(\mathbb{R}))$ beschränken. Die Menge $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))$ parametrisiert polarisierte komplexe Tori vom Index k zusammen mit der Wahl einer symplektischen Basis. Um die Abhängigkeit von der symplektischen Basis loszuwerden, müssen wir noch einen weiteren Quotienten bilden.

Lemma 4.12. *Seien $J, J' \in C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))$, dann sind die polarisierten komplexen Tori (X_J, H_J) und $(X_{J'}, H_{J'})$ genau dann isomorph (als polarisierte komplexe Tori), wenn ein $M \in Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ existiert, mit $J' = MJM^{-1}$.*

Beweis. Sei $\varphi : X_J \to X_{J'}$ ein Isomorphismus und sei $F : (\mathbb{R}^{2g}, J) \to (\mathbb{R}^{2g}, J')$ die dazu assoziierte Abbildung. Sei M die Darstellungsmatrix von F bezüglich den Standardbasen von $\mathbb{R}^{2g}$ als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Da F $\mathbb{C}$-linear ist, gilt $MJ = J'M$, bzw. $J' = MJM^{-1}$. Nach Satz (2.12) gilt $F(\mathbb{Z}^{2g}) \subseteq \mathbb{Z}^{2g}$, also hat M nur ganzzahlige Einträge. Analog zum Beweis von Satz (4.9) erhalten wir aus der Bedingung $H_J(v, w) = H_{J'}(F(v), F(w))$, unter Benutzung der Tatsache, dass die Standardbasen symplektisch sind, $I_{E_g} = M^T I_{E_g} M$. Also $M \in Sp_{2g}(\mathbb{Z})$. $\square$

Korollar 4.13. *Der topologische Raum $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))/Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ parametrisiert die Isomorphieklassen von polarisierten komplexen Tori mit Index k und Typ E_g.*

Die Gruppe $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ wirkt von links auf $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))$ und die Gruppe $U_{g-k,k}(\mathbb{C})$ wirkt von rechts. Wir verwenden für die jeweiligen Quotienten trotzdem die selbe Notation.
Im Fall der Abelschen Varietäten (also für $k = 0$) kann man zeigen, dass $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))/Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ ein analytischer Raum ist. Für $g \neq k \neq 0$ werden wir sehen, dass es nicht einmal ein Hausdorff-Raum ist. Der entscheidende Unterschied ist:

Lemma 4.14. *Sei $g \neq k \neq 0$. Dann ist $U_{g-k,k}(\mathbb{C})$ nicht kompakt.*

Beweis. Wir zeigen, dass die Menge unbeschränkt ist. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $(e_1, \ldots, e_g)$ die Standardbasis. Wir betrachten das g-Tupel von Vektoren $(ne_1 + \sqrt{n^2-1}e_g, e_2, e_3, \ldots, e_{g-1}, \sqrt{n^2-1}e_1 + ne_g)$. Jeder Vektor v aus diesem Tupel erfüllt $\bar{v}^T I_k v = \pm 1$ und es gilt $\bar{v}^T I_k w = 0$ für Vektoren $v \neq w$ aus diesem Tupel. Sei M_n die Matrix, welche die Vektoren des Tupels als Spalten hat, dann haben wir soeben berechnet, dass $\overline{M_n}^T I_k M_n = I_k$, also $M_n \in U_{g-k,k}(\mathbb{C})$. $\square$

4.2 $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))$ als komplexe Mannigfaltigkeit

In diesem Abschnitt wollen wir eine komplexe Struktur auf $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))$ konstruieren. Dazu erinnern wir uns daran, dass wir komplexe Tori bereits durch Elemente der komplexen Mannigfaltigkeit $Gr_g(\mathbb{C}^{2g})$ dargestellt haben. Daher ist es naheliegend zu versuchen, einen Isomorphismus zwischen einer Untermannigfaltigkeit von $Gr_g(\mathbb{C}^{2g})$ und $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))$ zu konstruieren.

Definition 4.15. *Wir definieren die Mengen:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_g &:= \left\{ [S] \in Gr_g(\mathbb{C}^{2g}) \middle| \; S \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix} S^T = 0 \right\} \\
\mathcal{H}_{g,k} &:= \left\{ [S] \in Gr_g(\mathbb{C}^{2g}) \middle| \; \begin{array}{c} S \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix} S^T = 0, \; i\overline{S} \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix} S^T \\ \textit{ist nicht degeneriert und hat den Index } g-k \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Ein Wechsel der Repräsentanten von $[S]$ entspricht jeweils einem Basiswechsel, diese Mengen sind also wohldefiniert. Um zu sehen, dass sie Untermannigfaltigkeiten von $Gr_g(\mathbb{C}^{2g})$ sind, betrachten wir, wie ihr Bild unter der Anwendung von Karten aussieht. Wir hatten die offene Menge U_1 definiert als $\{[A|B] \in Gr_g(\mathbb{C}^{2g})| \; A \text{ ist invertierbar}\}$ zusammen mit der Karte $X_1 : [A|B] \mapsto A^{-1}B$.

Lemma 4.16. *Die Abbildung X_1 induziert Isomorphismen $\mathcal{H}_g \cap U_1 \cong Sym_g(\mathbb{C})$ und $\mathcal{H}_{g,k} \cap U_1 \cong Sym_{g,k}(\mathbb{C})$, wobei $Sym_g(\mathbb{C})$ die Menge der symmetrischen Matrizen und $Sym_{g,k}(\mathbb{C}) := \{A \in Sym_g(\mathbb{C})| \; ImA \text{ ist nicht-degeneriert und } ind(ImA) = k\}$*

Beweis. Wir rechnen die definierenden Bedingungen für Matrizen der Form $S = (E_g|A)$ nach:

$$0 = (E_g|A) \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_g \\ A^T \end{pmatrix} = (E_g|A) \begin{pmatrix} A^T \\ -E_g \end{pmatrix} = A^T - A,$$

also $A = A^T$. Die andere Bedingung wird zu

$$\begin{aligned}
i(E_g|\overline{A}) \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_g \\ A^T \end{pmatrix} &= i(E_g|\overline{A}) \begin{pmatrix} A^T \\ -E_g \end{pmatrix} \\
&= i(A^T - \overline{A}) \\
&= i(A - \overline{A}) \\
&= i(2iImA) \\
&= -2ImA
\end{aligned}$$

Wenn $-2ImA$ den Index $g-k$ hat, hat ImA den Index k. □

Da $Sym_g(\mathbb{C})$ eine $g(g+1)/2$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $Mat_{g\times g}(\mathbb{C})$ ist (es ist sogar ein Untervektorraum), gilt selbiges auch für $\mathcal{H}_g \cap U_1 \subseteq U_1 \subseteq Gr_g(\mathbb{C}^{2g})$.

Im Fall $k = 0$ kann man sehr einfach zeigen (vgl. [CT, Seite 180]), dass $\mathcal{H}_{g,0} \subseteq U_1$. Somit ist $\mathcal{H}_{g,0}$ isomorph zur oberen Siegel-Halbebene, welche in der Theorie der abelschen Varietäten verwendet wird, um eben diese zu parametrisieren. Wir erhalten hier also tatsächlich eine Verallgemeinerung dieser Theorie.

Lemma 4.17. *$\mathcal{H}_{g,k} \cap U_1$ ist offen in $\mathcal{H}_g \cap U_1$. Insbesondere ist es somit eine Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{H}_g \cap U_1$ und somit auch von $Gr_g(\mathbb{C}^{2g})$.*

Beweis. Wir zeigen hierzu, dass die Menge

$$Sym_{g,k}(\mathbb{R}) := \{A \in Sym_g(\mathbb{R}) |\ A \text{ ist nicht degeneriert und hat den Index k}\}$$

offen in $Sym_g(\mathbb{R})$ ist. Da die Abbildung $A \mapsto ImA$ stetig ist, folgt daraus nämlich, dass auch die Menge $Sym_{g,k}(\mathbb{C})$ offen in $Sym_g(\mathbb{C})$ ist, was zu zeigen ist. Sei also $A \in Sym_{g,k}(\mathbb{R})$ beliebig. Nach dem Trägheitssatz von Sylvester existieren Vektorräume V_+, V_- mit $\mathbb{R}^g = V_+ \oplus V_-$ und $A_{|V+}$ ist positiv definit und $A_{|V_-}$ ist negativ definit. Da Basiswechsel Homöomorphismen auf $\mathbb{R}^g$ sind, können wir annehmen, dass $V_+ = span_{\mathbb{R}}(e_1, \ldots, e_{g-k})$ und $V_- = span_{\mathbb{R}}(e_{g-k+1}, \ldots e_g)$. Dann ist

$$A \in U := \{B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in Sym_{g,k}(\mathbb{R}) |\ a \text{ und } -d \text{ sind positiv definit}\}.$$

Um zu zeigen, dass U offen ist, genügt es also zu zeigen, dass die Menge aller positiv definiten Matrizen offen ist. Das folgt aber sofort aus dem Hauptminorenkriterium (vgl. [LA, Seite 327]). □

Wir bemerken, dass für eine Matrix $M \in Sp_{2g}(\mathbb{R})$ die Bedingungen $[S] \in \mathcal{H}_{g,k}$ und $[SM] \in \mathcal{H}_{g,k}$ äquivalent sind (das folgt sofort aus der Definition der symplektischen Gruppe). Wir wollen nun zu gegebenem $[S] \in \mathcal{H}_{g,k}$ ein $M \in Sp_{2g}(\mathbb{R})$ konstruieren, sodass $[SM] \in U_1$ ist. Zusammen mit der Tatsache, dass, für festes M, die Abbildung $[S] \mapsto [SM]$, biholomorph ist (nach Verknüpfung mit Karten ist es ein Polynom), folgt daraus sofort, dass $\mathcal{H}_{g,k}$ eine Untermannigfaltigkeit von $Gr_g(\mathbb{C}^{2g})$ ist.

Lemma 4.18. *Sei $0 \leq n \leq g$ und sei $A = (a|b|c|d) \in Mat_{g \times 2g}(\mathbb{C})$ mit $a, c \in Mat_{g \times g-n}(\mathbb{C})$, $b, d \in Mat_{g \times n}(\mathbb{C})$. Sei $M \in Gl_{2g}(\mathbb{C})$ die Permutationsmatrix, welche durch die Gleichung $AM = (a| - d|c|b)$, für alle $A \in Mat_{g \times 2g}(\mathbb{C})$, gegeben ist. Dann ist $M \in Sp_{2g}(\mathbb{R})$.*

Beweis. M^T führt die selbe Permutation mit den Spalten durch, somit haben wir:

$$\begin{aligned} M^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_{g-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \\ -E_{g-n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & 0 \end{pmatrix} M &= M^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_{g-n} & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & 0 \\ -E_{g-n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_{g-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \\ -E_{g-n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Lemma 4.19. *Sei $[S] \in Gr_g(\mathbb{C}^{2g})$ mit $S = (A|B)$ und sei $g - n = \mathrm{Rang} A$. Dann existiert ein $M \in Sp_{2g}(\mathbb{R})$, sodass $[SM]$ einen Repräsentanten der Form $\begin{pmatrix} E_{g-n} & a_1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ hat.*

Beweis. Sei $\alpha \in Gl_g(\mathbb{C})$ eine Permutationsmatrix, welche erfüllt, dass die ersten $g - n$ Spalten von $A\alpha$ linear unabhängig sind. Wir behaupten, dass dann die Matrix $M := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & (\alpha^T)^{-1} \end{pmatrix}$ symplektisch ist.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha^T & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & (\alpha^T)^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha^T & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (\alpha^T)^{-1} \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha^T(\alpha^T)^{-1} \\ \alpha^{-1}(-\alpha) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist also $SM = (A\alpha | B(\alpha^T)^{-1})$. Durch elementare Zeilenumformungen, also der Wahl eines anderen Repräsentanten, können wir diese Matrix auf die gewünschte Form bringen. □

Lemma 4.20. *Sei $[S] \in \mathcal{H}_g$ mit $S = \begin{pmatrix} E_{g-n} & a_1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. Dann ist b_4 invertierbar.*

Beweis. Angenommen b_4 wäre nicht invertierbar. Dann könnten wir durch elementare Zeilenumformungen der letzten n Zeilen erreichen, dass die erste Zeile vom b_4 eine Nullzeile wäre. Die Bedingung $[S] \in \mathcal{H}_g$ wird für Matrizen dieser Form zu:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} E_{g-n} & a_1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_{g-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \\ -E_{g-n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{g-n} & 0 \\ a_1^T & 0 \\ b_1^T & b_3^T \\ b_2^T & b_4^T \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} E_{g-n} & a_1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^T & b_3^T \\ b_2^T & b_4^T \\ -E_{g-n} & 0 \\ -a_1^T & 0 \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} b_1^T + a_1 b_2^T - b_1 - b_2 a_1^T & b_3^T + a_1 b_4^T \\ -b_3 - b_4 a_1^T & 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir also die Bedingung $-b_3 - b_4 a_1^T = 0 \Leftrightarrow -b_3 = b_4 a_1^T$. Da die erste Zeile von b_4 eine Nullzeile ist, folgt aus den Regeln der Matrizenmultiplikation, dass auch die erste Zeile von b_3 eine Nullzeile sein muss. Dann wäre allerdings auch die $g-n+1$-te Zeile von S eine Nullzeile, im Widerspruch dazu, dass $[S]$ in der Grassmann'schen liegt. $\square$

Satz 4.21. *Sei $[S] \in \mathcal{H}_{g,k}$ beliebig. Dann existiert eine Matrix $M \in Sp_{2g}(\mathbb{R})$, mit $[SM] \in U_1 \cap \mathcal{H}_{g,k}$. Insbesondere ist $\mathcal{H}_{g,k}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Nach Lemma (4.19) existiert ein $M_1 \in Sp_{2g}(\mathbb{R})$, sodass $[SM_1]$ einen Repräsentanten der Form $\begin{pmatrix} E_{g-n} & a_1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ hat. Nach Lemma (4.6) existiert ein $M_2 \in Sp_{2g}(\mathbb{R})$, sodass $[SM_1M_2]$ einen Repräsentanten der Form $\begin{pmatrix} E_{g-n} & -b_2 & b_1 & a_1 \\ 0 & -b_4 & b_3 & 0 \end{pmatrix}$ hat. Nach Lemma (4.20) ist b_4 invertierbar, und somit auch $\begin{pmatrix} E_{g-n} & -b_2 \\ 0 & -b_4 \end{pmatrix}$. Daraus folgt $[SM_1M_2] \in U_1$. $\square$

Da wir jetzt wissen, dass $\mathcal{H}_{g,k}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, müssen wir nur noch zeigen, dass sie homöomorph zu $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R})) \simeq Sp_{2g}(\mathbb{R})/U_{g-k,k}(\mathbb{C})$ ist. Wir kennen bereits die stetige Gruppenwirkung $([S], M) \mapsto [SM]$ von $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ auf $\mathcal{H}_{g,k}$. Diese erfüllt ihren Zweck:

Satz 4.22. *$Sp_{2g}(\mathbb{R})$ wirkt transitiv auf $\mathcal{H}_{g,k}$ und der Stabilisator von $[(E_g|iI_k)]$ ist* $\left\{ \begin{pmatrix} a & -I_k c I_k \\ c & I_k a I_k \end{pmatrix} \in Mat_{2g\times 2g}(\mathbb{C}) \middle| \begin{array}{c} a^T c = c^T a \\ a^T I_k a + c^T I_k b = I_k \end{array} \right\}$

Beweis. Sei $[S] \in \mathcal{H}_{g,k}$ beliebig. Nach Lemma (4.21) können wir annehmen, dass $[S] = [(E_g|A)] \in U_1 \cap \mathcal{H}_{g,k}$. Nach Lemma (4.16) hat ImA den Index k, es existiert also eine Basiswechselmatrix $\alpha \in Gl_g(\mathbb{R})$, mit $ImA = \alpha^T I_k \alpha$. Definieren wir $M := \begin{pmatrix} \alpha^{T^{-1}} & \alpha^{T^{-1}} ReA \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, dann ist nach Lemma (4.6) M symplektisch, und es gilt:

$$\begin{aligned}(E_g|iI_k)\begin{pmatrix}\alpha^{T^{-1}} & \alpha^{T^{-1}}ReA\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} &= (\alpha^{T^{-1}}|\alpha^{T^{-1}}Re(A)+iI_k\alpha)\\ &= \alpha^{T^{-1}}(E_g|Re(A)+i\alpha^T I_k\alpha)\\ &= \alpha^{T^{-1}}(E_g|A),\end{aligned}$$

also $[(E_g|iI_k)M] = [(E_g|A)] = [S]$. Da $[S]$ beliebig war, ist die Wirkung transitiv.
Sei nun $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ im Stabilisator von $[(E_g|iI_k)]$. Dann existiert ein $G \in Gl_g(\mathbb{C})$ mit

$$(E_g|I_k)\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = (a+iI_kc|b+iI_kd) \stackrel{!}{=} G(E_g|iI_k) = (G|iGI_k),$$

also $a+iI_kc = G$ und

$$b+iI_kd = iGI_k = i(a+iI_kc)I_k = iaI_k - I_kcI_k.$$

Teilen wir diese Gleichung in Real- und Imaginärteil auf, erhalten wir die beiden Bedingungen $b = -I_kcI_k$ und $I_kd = aI_k$. Das sind die selben Bedingungen, wie wir sie in Satz (4.9) errechnet haben. Wir können also komplett analog fortfahren. $\square$

Damit haben wir unser Ziel für dieses Kapitel erreicht.

Korollar 4.23. *$C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R})) \simeq Sp_{2g}(\mathbb{R})/U_{g-k,k}(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}_{g,k}$. Insbesondere können wir $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))$ mit der Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit der Dimension $g(g+1)/2$ ausstatten.*

Zuletzt beweisen wir noch ein Lemma, welches wir in Kapitel 6 benötigen.

Lemma 4.24. *Die Gruppe $Sp_{2g}(\mathbb{C})$ wirkt transitiv auf $\mathcal{H}_g$. Der Stabilisator von $[(E_g|0)]$ ist gegeben durch $Stab[(E_g|0)] = \left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ b & c\end{pmatrix} \in Sp_{2g}(\mathbb{C}) \,\middle|\, a,b,c \in Mat_{g\times g}(\mathbb{C})\right\}$*

Beweis. Sei $[S] \in \mathcal{H}_g$ beliebig. Mit dem selben Beweis wie dem von Satz (4.21) können wir zeigen, dass ein $M \in Sp_{2g}(\mathbb{C})$ existiert, mit $[SM] \in U_1$. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass $[S] = [(E_g|A)] \in U_1$, wobei A symmetrisch ist. Wir definieren $L := \begin{pmatrix}E_g & A\\ 0 & E_g\end{pmatrix}$. Offensichtlich ist $[(E_g|0)L] = [(E_g|A)]$. Eine direkte Rechnung ergibt ebenfalls, dass L symplektisch ist. Damit ist die Gruppenwirkung transitiv.

Sei $[(E_g|0)]\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = [(E_g)|0]$. Dann existiert ein $g \in Gl_g(\mathbb{C})$ mit

$$(a|b) = (E_g|0)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = g(E_g|0) = (g|0).$$

Wir erhalten also die Bedingungen $b = 0$ und $a \in Gl_g(\mathbb{C})$. Da symplektische Matrizen immer invertierbar sind, ist die Bedingung für a redundant. $\square$

5 Wirkungen diskreter Gruppen

In diesem Kaptiel wollen wir beweisen, dass $C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))/Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ genau dann kein Hausdorff-Raum ist, wenn $0 < k < g$.

Definition 5.1. *Sei G ein topologischer Raum. Wir definieren $B(G)$ als die kleinste σ-Algebra, welche alle offenen Mengen von G enthält (vgl. [WT, Seite 9]). Wir nennen $B(G)$ die **Borel-Algebra** und Mengen $A \in B(G)$ nennen wir **Borel-messbar**.*

Definition 5.2. *Sei G eine Gruppe mit der Struktur einer reellen Mannigfaltigkeit. Wir nennen G eine reelle **Lie-Gruppe**, falls die beiden Abbildungen*

$$\begin{array}{rcl} G & \to & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \\ G \times G & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & gh \end{array}$$

differenzierbar sind.

Definition 5.3. *Sei G eine reelle Lie-Gruppe und sei ω eine links-invariante, von Null verschiedene n-Form auf G. Wir nennen die Abbildung $\mu : B(G) \to \mathbb{R}_+$ mit*

$$\mu(A) := \int_A \omega$$

*das (links-invariante) **Haar-Maß** auf G. Es erfüllt $\mu(Ag) = \mu(A)$, ist bis auf Multiplikation mit einer positiven Konstanten eindeutig und es existiert eine sogenannte modulare Funktion $\Delta : G \to \mathbb{R}_+$ mit $\mu(Ag) = \Delta(g)\mu(A)\ \forall g \in G$ (vgl. [FDM, Seite 151]).*

5.1 Fundamentalgebiete

Sei im Folgenden G immer eine reelle Lie-Gruppe, μ ein Haar-Maß auf G, e das neutrale Element von G und $\Gamma \subseteq G$ eine diskrete Untergruppe.

Definition 5.4. *Eine Teilmenge $F \subseteq G$ nennen wir **Fundamentalgebiet** von G bezüglich Γ, falls gilt:*

- $\Gamma F = G$
- $aF \cap F = \emptyset \ \forall a \in \Gamma \setminus \{e\}$
- *F ist Borel-messbar*

Wir wollen nun beweisen, dass ein Fundamentalgebiet immer existiert und dass $\mu(F)$ unabhängig von der Wahl des Fundamentalgebietes F ist. Wir orientieren uns hierbei an [DiG].

Lemma 5.5. *Für alle $g \in G$ existiert eine offene Umgebung V_g von g mit*

$$aV_g \cap V_g = \emptyset \ \forall a \in \Gamma \setminus \{e\}.$$

Beweis. Sei U eine offene Teilmenge von G mit $U \cap \Gamma = \{e\}$. Eine Solche existiert, da Γ diskret ist. Betrachten wir nun die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : G \times G &\to G \\ (a,b) &\mapsto ab^{-1} \end{aligned}$$

Dann ist $\phi^{-1}(U) \subseteq G \times G$ eine offene Umgebung von (e,e). Offene Mengen in $G \times G$ sind Vereinigungen von Mengen der Form $U_1 \times U_2$, für offene Mengen U_1, U_2. Es existieren also offene Mengen U_1, U_2 mit $(e,e) \in U_1 \times U_2 \subseteq \phi^{-1}(U)$. Die nicht leere, offene Menge $S := U_1 \cap U_2$ erfüllt dann, per Konstruktion, $SS^{-1} \subseteq U$. Wir definieren $V_g := Sg$.
Seien $x = s_1 g$ und $y = s_2 g \in Sg$ beliebig. Dann ist

$$xy^{-1} = s_1 g g^{-1} s_2^{-1} = s_1 s_2^{-1} \in U.$$

Per Definition von U folgt somit, dass $xy^{-1} \neq a$, bzw. $x \neq ay$ für alle $a \in \Gamma \setminus \{e\}$, was zu zeigen war. □

Satz 5.6. *Es existiert ein Fundamentalgebiet von G bezüglich Γ.*

Beweis. Eine Lie-Gruppe ist insbesondere ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Seien $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ diejenigen Elemente der Basis, welche in einer der Mengen V_g aus Lemma (5.5) enthalten sind. Nun definieren wir

$$\begin{aligned} F_1 &:= S_1 \\ F_k &:= S_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \Gamma S_i\right) \qquad k > 1 \\ F &:= \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \end{aligned}$$

Per Definition einer Basis gilt $V_g = \bigcup\limits_{U_i \subseteq V_g} U_i$, insbesondere ist also jedes $g \in G$ in einer der Mengen S_i enthalten. Weiterhin enthält jede Menge S_i höchstens ein Element aus Γ, woraus folgt, dass Γ höchstens abzählbar ist. Damit ist ΓS_i als abzählbare Vereinigung Borel-messbarer Mengen selbst wieder Borel-messbar. Deswegen ist auch F Borel-messbar. Es ist $F_k \subseteq S_k$, und somit

$$aF_k \cap F_k = \emptyset \; \forall a \in \Gamma \setminus \{e\}.$$

Außerdem ist, für $k < l$, $aF_k \subseteq \Gamma(S_1 \cup \cdots \cup S_k \cup \cdots \cup S_{l-1})$, und daher $aF_k \cap F_l = \emptyset$. Zusammen mit

$$F_k \cap aF_l = a(a^{-1}F_k \cap F_l) = a\emptyset = \emptyset$$

erhalten wir $aF_k \cap F_l = \emptyset$ für beliebige $k, l \in \mathbb{N}$, woraus $aF \cap F = \emptyset$ für alle $a \in \Gamma \setminus \{e\}$ folgt.

Sei nun $g \in G$ beliebig, und sei k der kleinste Index mit $g \in \Gamma S_k$. Dann ist

$$g \in \Gamma S_k \setminus (\bigcup_{i=1}^{k-1} \Gamma S_i) = \Gamma F_k,$$

also $g \in \Gamma F$. Da g beliebig war, ist $\Gamma F = G$. Damit ist alles gezeigt. □

Lemma 5.7. *Seien E und F zwei Fundamentalgebiete von G bezüglich Γ. Dann existieren disjunkte Zerlegungen*

$$E = \bigcup_{a \in \Gamma} E_a$$
$$F = \bigcup_{a \in \Gamma} F_a$$

mit Borel-messbaren Mengen $(E_a)_{a\in\Gamma}, (F_a)_{a\in\Gamma}$ sowie $F_a = aE_a$. Insbesondere ist also $\mu(E) = \mu(F)$.

Beweis. Wir definieren $F_a := aE \cap F$ und $E_a := E \cap a^{-1}F$. Dann ist $F_a = aE_a$ und die Mengen F_a, E_a sind Borel-messbar. Weiterhin gilt für $a \neq b \in \Gamma$:

$$\begin{aligned}
F_a \cap F_b &= aE \cap bE \cap F \overset{*}{=} \emptyset \cap F = \emptyset \\
E_a \cap E_b &= a^{-1}F \cap b^{-1}F \cap E \overset{*}{=} \emptyset \cap E = \emptyset \\
\bigcup_{a\in\Gamma} F_a &= (\bigcup_{a\in\Gamma} aE) \cap F = \Gamma E \cap F \overset{*}{=} G \cap F = F \\
\bigcup_{a\in\Gamma} E_a &= (\bigcup_{a\in\Gamma} aF) \cap E = \Gamma F \cap E \overset{*}{=} G \cap E = E.
\end{aligned}$$

In den mit $*$ markierten Gleichungen haben wir verwendet, dass E und F Fundamentalgebiete sind. □

Lemma 5.8. *Sei $\mu(F) < \infty$. Dann ist μ auch rechts-invariant, d.h. $\mu(Ag) = \mu(A)$ für alle $g \in G$ und alle $A \in B(G)$.*

Beweis. Sei $g \in G$ beliebig und F ein Fundamentalgebiet von G. Dann ist Fg auch ein Fundamentalgebiet, es gilt also

$$\mu(F) = \mu(Fg) = \Delta(g)\mu(F).$$

In Satz (5.6) haben wir ein Fundamentalgebiet konstruiert, welches die offene, nicht leere Menge S_1 enthält, d.h.

$$0 < \mu(S_1) \leq \mu(F) < \infty.$$

Damit erhalten wir $\Delta(g) = 1$ für alle $g \in G$, was zu zeigen war. □

Lemma 5.9. *Sei $F \subseteq G$ ein Fundamentalgebiet und sei K eine Borel-messbare Menge, welche in einem Fundamentalgebiet $E \subseteq F$ enthalten ist. Dann ist $\mu(K) = \mu(\Gamma K \cap F)$.*

Beweis. Sei $E = \bigcup_{a \in \Gamma} E_a$ wie in Lemma (5.7). Dann ist

$$K = \bigcup_{a \in \Gamma} K \cap E_a = \bigcup_{a \in \Gamma} K \cap E \cap a^{-1}F.$$

Weiterhin gilt $K \cap E \cap a^{-1}F = K \cap a^{-1}F = a^{-1}(aK \cap F)$. Somit ist also

$$K = \bigcup_{a \in \Gamma} a^{-1}(aK \cap F).$$

Daraus folgt

$$\mu(K) = \sum_{a \in \Gamma} \mu(a^{-1}(aK \cap F)) = \sum_{a \in \Gamma} \mu(aK \cap F) = \mu(\Gamma K \cap F).$$

Letztere Gleichung folgt daraus, dass $K \subseteq E$, woraus folgt, dass die aK paarweise disjunkt sind. □

5.2 Normalteiler der symplektischen Gruppe

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass $\{E_{2g}\}, \{E_{2g}, -E_{2g}\}$ und $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ die einzigen Normalteiler von $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ sind. Dazu zitieren wir einen tiefer liegenden Satz aus der Theorie der Lie-Algebren:

Satz 5.10. *$Sp_{2g}(\mathbb{R})$ ist eine zusammenhängende, einfache Lie-Gruppe, das heißt die einzigen zusammenhängenden Normalteiler sind $\{E_{2g}\}$ und $Sp_{2g}(\mathbb{R})$. Außerdem hat ein Fundamentalgebiet von $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ bezüglich $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ endliches Maß.*

Beweis. Nach [KlG, Seite 221] sind $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ und $Sp_{2g}(\mathbb{C})$ einfache Lie-Gruppen. Nach einem Theorem von Borel und Harish-Chandra (vgl. [ASAG, Seite 519]) und Lemma (5.7) hat jedes Fundamentalgebiet in dieser Situation endliches Maß. □

Lemma 5.11. *Jede Zusammenhangskomponente jedes nicht-trivialen Normalteilers einer zusammenhängenden, einfachen Lie-Gruppe ist besteht nur aus einem Element.*

Beweis. Sei G eine zusammenhängende, einfache Lie-Gruppe. Angenommen es gäbe einen Normalteiler $N \subseteq G$, welcher eine Zusammenhangskomponente $U \subseteq N$ besäße, welche aus mehreren Punkten bestünde, und sei $g \in U$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} N &\to N \\ x &\mapsto g^{-1}x \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus, welcher U in die Zusammenhangskomponente N_0 von N, welche e enthält, abbildet. Also besteht N_0 auch aus mehreren Elementen. Es genügt somit zu zeigen, dass N_0 selbst wieder ein Normalteiler ist, denn dann haben wir einen Widerspruch zur Einfachheit von G.
Sei $g \in N_0$ beliebig. Dann ist das Bild von N_0 unter der stetigen Abbildung $x \mapsto gx$ eine zusammenhängende Menge, welche insbesondere das Element $ge = g$ enthält, und somit eine Teilmenge von N_0. Daraus folgt $gx \in N_0$ für alle $g, x \in N_0$.
Analog ist das Bild von N_0 unter der Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ eine Teilmenge von N_0, und somit ist N_0 eine Untergruppe von N.
Ebenfalls analog folgt, dass für beliebiges $g \in G$ das Bild von N_0 unter der Abbildung $x \mapsto gxg^{-1}$ eine Teilmenge von N_0 ist, woraus folgt, dass N_0 ein Normalteiler von G ist. □

Definition 5.12. *Sei G eine Gruppe. Dann nennen wir*

$$Z(G) := \{g \in G \mid gx = xg \ \forall x \in G\}$$

*das **Zentrum** von G.*

Lemma 5.13. *Jeder Normalteiler einer zusammenhängenden Lie-Gruppe, welcher nun einelementige Zusammenhangskomponenten besitzt, liegt im Zentrum dieser.*

Beweis. Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe und $N \subseteq G$ ein Normalteiler. Sei $n \in N$ beliebig. Wir betrachten die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_n : G &\to G \\ g &\mapsto gng^{-1}. \end{aligned}$$

Da N ein Normalteiler ist, ist $\varphi_n(G) \subseteq N$. Da φ_n stetig ist, ist $\varphi_n(G)$ zusammenhängend. Nach Voraussetzung an N ist φ_n somit konstant, und aus $\varphi_n(e) = n$ folgt somit $gng^{-1} = n$ für alle $g \in G$, also $n \in Z(G)$, was zu zeigen war. □

Um die Normalteiler der symplektischen Gruppe zu bestimmen, müssen wir also das Zentrum dieser bestimmen.

Satz 5.14. *Es gilt:*

- $Z(Gl_g(\mathbb{R})) = \{\lambda E_g \in Gl_g(\mathbb{R}) |\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$
- $Z(Sp_{2g}(\mathbb{R})) = \{E_{2g}, -E_{2g}\}$

Insbesondere sind alle Normalteiler der symplektischen Gruppe ein Element von

$$\{\{E_{2g}\}, \{E_{2g}, -E_{2g}\}, Sp_{2g}(\mathbb{R})\}$$

.

Beweis. Sei $M \in Z(Gl_g(\mathbb{R}))$, dann gilt $SM = MS$ beziehungsweise $M = S^{-1}MS$ für alle $S \in Gl_g(\mathbb{R})$. Wir betrachten M als die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto Mv \end{aligned}$$

bezüglich der Standardbasis $(e_1, \ldots, e_g)$. Die Bedingung $M = S^{-1}MS$ gibt uns dann, dass M die Darstellungsmatrix von α bezüglich jeder Basis ist. Für $i \neq j$ betrachten wir die Basis $(e_1, \ldots, e_{j-1}, 2e_j, e_{j+1}, \ldots, e_g)$. Der Basiswechsel in diese Basis verursacht unter anderem, dass sich der Eintrag der Darstellungsmatrix an der Stelle (i, j) halbiert, da die Matrix aber gleich bleibt, muss M eine Diagonalmatrix sein.
Sei nun $i < j$. Wir betrachten die Basis $(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \ldots, e_g)$. Ein Basiswechsel in diese Basis führt unter anderem dazu, dass sich die Einträge an den Stellen (i, i) und (j, j) vertauschen. Da sich unsere Matrix aber nicht verändert, müssen alle Diagonaleinträge gleich gewesen sein, also $M = \lambda E_g$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sei nun $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Z(Sp_{2g}(\mathbb{R}))$ beliebig. Dann gilt $S^{-1}MS = M$ beziehungsweise $SM = MS$ für alle $S \in Sp_{2g}(\mathbb{R})$. Insbesondere gilt es für $S = \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix}$, ausmultiplizieren ergibt dann:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} \text{ und} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also $a = d$ und $c = -b$, somit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Wir haben im Beweis von Lemma (4.19) gesehen, dass für beliebige $\alpha \in Gl_g(\mathbb{R})$ die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{T^{-1}} \end{pmatrix}$$

symplektisch ist. Für diese Matrix erhalten wir die Bedingung:

$$\begin{aligned} S^{-1}MS &= \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{T^{-1}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\alpha & b\alpha^{T^{-1}} \\ -b\alpha & a\alpha^{T^{-1}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^{-1}a\alpha & \alpha^{-1}b\alpha^{T^{-1}} \\ -\alpha^T b\alpha & \alpha^T a\alpha^{T^{-1}} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir $\alpha^{-1}a\alpha = a$ und $\alpha^T b\alpha = b$. Wählen wir $\alpha = 2E_g$, erhalten wir $4b = b$, also $b = 0$. Da $\alpha \in Gl_g(\mathbb{R})$ beliebig gewählt war, erhalten wir außerdem $a \in Z(Gl_g(\mathbb{R}))$, also $a = \lambda E_g$, und somit $M = \lambda E_{2g}$. Damit M symplektisch ist, muss zusätzlich noch $\lambda \in \{1, -1\}$ gelten. □

5.3 Die Topologie des Periodengebietes aller polarisierten Tori vom Index k

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass das Periodengebiet aller polarisierten Tori vom Index $0 < k < g$ kein Hausdorff-Raum ist. Wir verwenden die Abkürzungen:

$$\begin{aligned} G &:= Sp_{2g}(\mathbb{R}) \\ H &:= U_{g-k,k}(\mathbb{C}) \subseteq G \quad (\textit{vgl. Lemma } (4.10)) \\ \Gamma &:= Sp_{2g}(\mathbb{Z}) \\ Y &:= G/H \cong C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R})) \quad (\textit{vgl. Lemma } (4.11)) \\ H_G &= \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg \end{aligned}$$

H_G ist der größte Normalteiler von G, welcher in H enthalten ist, nach Satz (5.14) ist er endlich.

Bevor wir anfangen, benötigen wir noch ein mengentheoretisches Lemma.

Lemma 5.15 ([OD, Seite 365]). *Sei X eine reelle Mannigfaltigkeit (es genügt ein topologischer Raum, welcher lokal homöomorph zu offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist), und sei $\emptyset \neq A \subseteq X$ eine abgeschlossene Menge, welche jeden ihrer Punkte als Häufungspunkt hat. Dann ist A überabzählbar.*

Beweis. Angenommen es gäbe eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to A$. Sei $x_i := f(i)$ für $i \in \mathbb{N}$. Sei

$U \subseteq X$ eine offene Umgebung von x_1, welche homöomorph zur Einheitskugel $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist. Wir wollen nun zeigen, dass bereits $U \cap A \nsubseteq f(\mathbb{N})$ ist.
Statten wir U mit der von X induzierten Teilmengentopologie aus, dann ist $U \cap A \neq \emptyset$ eine abgeschlossene Teilmenge des topologischen Raums $U \cong B_1(0)$, welche jeden ihrer Punkte als Häufungspunkt hat. Es genügt also den Fall $X = B_1(0)$ und $x_1 = 0$ zu betrachten.
Da jeder Punkt x_k von $A = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein Häufungspunkt ist, existiert zu jedem Radius ϵ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_\epsilon(x_k) \setminus \{x_k\}$. Wir konstruieren nun rekursiv eine konvergente Teilfolge von $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, deren Grenzwert nicht in $f(\mathbb{N})$, aber in A liegt. Das ist ein Widerspruch. Sei $i_1 = 1$ und $\epsilon_1 = \frac{1}{2}$. Weiterhin sei

$$\begin{aligned} i_{n+1} &:= \min\{m \in \mathbb{N} |\ x_m \in B_{\epsilon_n}(x_{i_n}) \setminus \{x_{i_n}\}\} \\ \sigma_{n+1} &:= |x_{i_{n+1}} - x_{i_n}| \\ \epsilon_{n+1} &:= \frac{1}{2}\min(\sigma_{n+1}, \epsilon_n - \sigma_{n+1}) \end{aligned}$$

Die Wahl der ϵ_n führt zu $B_{\epsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq B_{\epsilon_n}(x_n)$ und $\epsilon_{n+1} \leq \frac{1}{2}\epsilon_n$. Insbesondere liegt jedes Folgenglied in dem vollständigen metrischen Raum $\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)} \subseteq A$. Durch Abschätzen mit der geometrischen Reihe erhalten wir außerdem, dass $(x_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, und somit konvergiert. Sicherlich ist ihr Grenzwert kein Element von $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, was zu zeigen war. $\square$

Sei $A \subseteq G$ eine analytische Menge. In jedem regulärem Punkt $x \in A$ ist A lokal eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $dim_x(A)$. Wir nennen die Zahl $dim(A) := \max\{dim_x(A) \mid x \in A_{reg}\}$ die Dimension von A. Sei n die Dimension von G, dann nennen wir die Zahl $codim_G(A) := n - dim(A)$ die Kodimension von A in G.

Lemma 5.16. *Sei $g \in G$, und sei $Y_g := \{y \in Y |\ gy = y\}$. Dann ist die analytische Menge $Y_g \subseteq Y$ genau dann von Kodimension > 0, falls $g \notin H_G$.*

Beweis. Für festes $g \in G$ ist die Abbildung $y \mapsto gy$ holomorph, und somit ist Y_g als Fixpunktmenge einer holomorphen Funktion analytisch (in lokalen Koordinaten ist sie gegeben als Nullstellenmenge der holomorphen Funktion x-F(x)). Nach ([FG, Seite 160]) ist eine analytische Teilmenge einer zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeit genau dann von Kodimension 0, wenn sie gleich der Mannigfaltigkeit ist. Somit folgt die Aussage aus folgender Äquivalenz:

$$\begin{aligned} & Y_g = Y \\ \Leftrightarrow\ & g\tilde{g}H = \tilde{g}H \quad \forall \tilde{g} \in G \\ \Leftrightarrow\ & g \in \tilde{g}HH^{-1}\tilde{g}^{-1} = \tilde{g}H\tilde{g}^{-1} \quad \forall \tilde{g} \in G \\ \Leftrightarrow\ & g \in \bigcap_{\tilde{g} \in G} \tilde{g}H\tilde{g}^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & g \in H_G \end{aligned}$$

□

Satz 5.17. *Sei $A \subseteq G/H = Y$ eine analytische Teilmenge mit Kodimension > 0 von der komplexen Mannigfaltigkeit Y. Sei $\pi : G \to G/H$ die kanonische Projektion. Dann ist $\mu(\pi^{-1}(A)) = 0$.*

Beweis. Nach [FG, Seite 141] lässt sich A in abzählbar viele irreduzible analytische Mengen zerlegen. Es genügt also, irreduzible analytische Mengen zu betrachten.
Sei also A eine irreduzible analytische Menge. In solchen Mengen hat jeder reguläre Punkt die selbe Kodimension. Sei $x \in A_{reg}$ ein regulärer Punkt von A und sei $d := \operatorname{codim}_x(A)$ die Kodimension von A in x. Dann existiert eine offene Umgebung U von x und eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}^d$ mit überall surjektivem Differential und

$$U \cap A = \{z \in A \mid f(z) = 0\} \quad (\text{vgl. [FG, Seite 39]}).$$

Die reell differenzierbare Abbildung π hat ebenfalls ein überall surjektives (reelles) Differential (vgl. [FDM, Seite 120]), und damit auch die reell differenzierbare Abbildung $f \circ \pi : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{C}^d \cong \mathbb{R}^{2d}$. Daraus folgt, dass $\pi^{-1}(U \cap A)$, also die Nullstellenmenge von $f \circ \pi$, eine reelle Untermannigfaltigkeit von Kodimension $2d > 0$ ist. Führen wir dieses Argument in jedem regulären Punkt durch, erhalten wir, dass auch $\pi^{-1}(A_{reg})$ eine reelle Untermannigfaltigkeit von G ist. Verwenden wir nun, dass die Menge der singulären Punkte von A wieder eine analytische Menge ist, welche echt größere Kodimension hat (vgl. [FG, Seite 147]), erhalten wir induktiv, dass $\pi^{-1}(A)$ eine abzählbare (nicht notwendigerweise disjunkte) Vereinigung von Untermannigfaltigkeiten ist, welche alle eine reelle Kodimension von mindestens Zwei haben.
Es genügt somit zu zeigen, dass solche Untermannigfaltigkeiten jeweils Maß Null haben. Das folgt aber sofort daraus, dass $\mu(M) := \int_M \omega$, für eine n-Form ω, und ein Integral einer n-Form über eine $n-d$-dimensionale Untermannigfaltigkeit für $d > 0$ sicherlich verschwindet. □

Lemma 5.18. *Es gilt:*

- *Sei $V \subseteq Y$ offen und nicht-leer. Dann existiert eine offene Menge $\emptyset \neq U \subseteq G$ mit kompaktem Abschluss $K := \overline{U}$, sodass $K \subseteq F$ für ein Fundamentalgebiet F und $\pi(K) \subseteq V$.*
- *Sei $L \subseteq G$ kompakt, dann ist $L^{-1}L$ ebenfalls kompakt.*

Beweis. Sei $g \in \pi^{-1}(V)$ und sei V_g eine offene Umgebung wie sie in Lemma (5.5) konstruiert wurde. Indem wir die offene, nicht leere Menge $M := V_g \cap \pi^{-1}(V)$ zu einer abzählbaren Basis fortsetzen, können wir wie im Beweis von Lemma (5.6) ein Fundamentalgebiet F mit $M \subseteq F$ konstruieren. Da G eine reelle Mannigfaltigkeit ist, existiert eine offene Teilmenge $N \subseteq M$, welche homöomorph zur Einheitskugel in einem $\mathbb{R}^n$ ist. $U := B_{\frac{1}{2}}(0)$,

interpretiert als Teilmenge von N, hat dann die gewünschten Eigenschaften.
Sei $L \subseteq G$ kompakt. Nach dem Satz von Tychonoff (vgl. [Top, Seite 67]) ist dann auch $L \times L$ kompakt. $L^{-1}L$ ist also das Bild der kompakten Menge $L \times L$ unter der stetigen Abbildung $(g_1, g_2) \mapsto g_1^{-1}g_2$, und somit kompakt. □

Bis jetzt haben wir in keinem Beweis verwendet, dass wir uns nicht mit abelschen Varietäten beschäftigen. Die Aussage, welche wir beweisen wollen, ist in dieser Situation allerdings falsch (vgl. ([CAV, Seite 215])). Eine erste Abweichung zur Theorie der abelschen Varietäten erhalten wir in folgendem, zentralem Lemma, in welchem wir verwenden, dass $U_{g-k,k}(\mathbb{C})$ für $0 \neq k \neq g$ nicht kompakt ist (vgl. Lemma (4.14)). Von nun an orientieren wir uns an [CT, Seite 212-214].

Lemma 5.19. *Sei $0 \neq k \neq g$ und sei $V \subseteq Y$ offen und nicht leer. Dann existiert eine Bahn $\Gamma y \subseteq Y$, sodass $\Gamma y \cap V$ aus unendlich vielen Punkten besteht.*

Beweis. Seien $U \subseteq K \subseteq F$ die Mengen aus Lemma (5.18). Wir zeigen zunächst, dass eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H = U_{g-k,k}(\mathbb{C})$ existiert, sodass die Mengen KA_i paarweise disjunkt sind. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es Elemente $A_1, \dots, A_n \in H$, sodass für jedes $A_{n+1} \in H$ ein Index $1 \leq i \leq n$ existiert mit $KA_i \cap KA_{n+1} \neq \emptyset$, also $A_{n+1} \in K^{-1}KA_i$. Da $A_{n+1} \in H$ beliebig war, folgt $H \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K^{-1}KA_i$.
Allerdings ist $\bigcup_{i=1}^{n} K^{-1}KA_i$ als endliche Vereinigung kompakter Mengen (vgl. Lemma 5.18) kompakt, und H ist abgeschlossen in G und somit auch in $\bigcup_{i=1}^{n} K^{-1}KA_i$, aber es ist nicht kompakt. Das ist ein Widerspruch dazu, dass abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen kompakt sind.
Betrachten wir nun die Mengen:

$$\begin{aligned} P_i &:= \Gamma KA_i \cap F \\ Q_k &:= \bigcup_{i=k}^{\infty} P_i \\ Q &:= \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k \end{aligned}$$

Die Mengen Q_k erfüllen $Q_{k+1} \subseteq Q_k$ für alle $k \in N$. Außerdem gilt

$$\infty > \mu(F) \geq \mu(Q_k) \geq \mu(P_k) \geq \mu(K) > 0.$$

Die Ungleichung $\mu(P_k) \geq \mu(K)$ folgt aus der bi-Invarianz von μ zusammen mit Lemma (5.9). In dieser Situation besagt ein elementarer Satz aus der Maßtheorie (vgl. [WT, Seite 16]), dass $\mu(Q) = \lim_{k\to\infty}(Q_k)$. Die Endlichkeit des Maßes von F ist hier entscheidend. Damit folgt

$$\mu(Q) = \lim_{k\to\infty}(Q_k) \geq \mu(K) > 0.$$

Sei nun $x \in Q$ beliebig. Per Konstruktion ist x in unendlich vielen der P_i enthalten, es existiert also eine Teilfolge $(A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x \in P_{n_k} = \Gamma K A_{n_k} \cap F \subseteq \Gamma K A_{n_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Damit gibt es Elemente $(r_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \Gamma$ mit $r_k x \in KA_{n_k}$. Da die Mengen KA_{n_k} nach Konstruktion paarweise disjunkt sind, müssen die Elemente (r_k) paarweise verschieden sein. Wenn wir nun die Projektion $\pi : G \to G/H$ anwenden, erhalten wir

$$r_k\pi(x) \in \pi(KA_{n_k}) = \pi(K). \tag{9}$$

Das Lemma ist bewiesen, falls wir zeigen können, dass ein $x \in Q$ existiert, sodass $\Gamma\pi(x) \cap \pi(K)$ unendlich viele Elemente besitzt.
Angenommen $\Gamma\pi(x) \cap \pi(K)$ wäre endlich für alle $x \in Q$. Da es unendlich viele Elemente $r_k \in \Gamma$ mit $r_k\pi(x) \in \pi(K)$ gibt, muss es unendlich viele Paare $i \neq j \in \mathbb{N}$ geben mit $r_i\pi(x) = r_j\pi(x)$, also $r_j^{-1}r_i\pi(x) = \pi(x)$ geben. Mit der Notation aus Lemma (5.16) bedeutet dies $\pi(x) \in Y_{r_j^{-1}r_i}$. H_G ist endlich, mindestens einer der $r_j^{-1}r_i$ liegt also nicht in H_G. Da $x \in Q$ beliebig war, erhalten wir damit

$$Q \subseteq \bigcup_{r\in\Gamma\setminus H_G} Y_r$$

und somit

$$0 < \mu(Q) \leq \mu(\bigcup_{r\in\Gamma\setminus H_G} Y_r) \leq \sum_{r\in\Gamma\setminus H_G} \mu(Y_r) \overset{5.17}{=} 0.$$

Ein Widerspruch. □

Lemma 5.20. *Sei $y \in Y$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Die Bahn Γy ist abgeschlossen in Y.*
2. *Die Bahn Γy hat keinen Häufungspunkt in Y.*

Beweis. Mengen ohne Häufungspunkt sind sicherlich immer abgeschlossen.
Sei also Γy abgeschlossen. Dann ist jeder Häufungspunkt von Γy ein Element von Γy. Sei yr_1 ein Häufungspunkt und sei $yr_2 \in g\Gamma$ beliebig. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : Y &\to Y \\ x &\mapsto r_2r_1^{-1}x \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus mit $\varphi(\Gamma y) = \Gamma y$ und $\varphi(r_1 y) = r_2 y$. Also ist $r_2 y$ auch ein Häufungspunkt. Damit ist jeder Punkt von Γy ein Häufungspunkt, und nach Lemma (5.15) ist Γy überabzählbar. Ein Widerspruch. □

Damit können wir den zentralen Satz dieses Kapitels beweisen:

Satz 5.21. *Sei* $0 \neq k \neq g$. *Die Menge*

$$N := \{\Gamma y \in Y/\Gamma |\ \overline{\{\Gamma y\}} \neq \{\Gamma y\}\} \subseteq Y/\Gamma$$

der nicht abgeschlossenen Punkte liegt dicht in Y/Γ.
Insbesondere ist Y/Γ *kein Hausdorff-Raum.*

Beweis. Angenommen N läge nicht dicht in Y/Γ. Dann wäre die offene Menge

$$W := Y/\Gamma \setminus \overline{N}$$

nicht leer. Sei $V \subseteq \pi^{-1}(W) \subseteq Y$ eine offene Menge mit kompaktem Abschluss $\overline{V} \subseteq \pi^{-1}(W)$. Nach Lemma (5.19) gibt es eine Bahn Γy, sodass $\Gamma y \cap V$ aus unendlich vielen Punkten besteht. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt $\Gamma y \cap \overline{V}$, und damit auch Γy, einen Häufungspunkt. Nach Lemma (5.20) bedeutet dies, dass Γy nicht abgeschlossen ist. Daraus folgt, dass $\{\Gamma y\} \subseteq Y/\Gamma$ keine abgeschlossene Menge ist. Allerdings besitzt Γy einen Punkt in $V \subseteq \pi^{-1}(W)$, und damit ist $\pi(\Gamma y) \subseteq W$. Daraus folgt, dass Γy kein Element von N ist. Das ist ein Widerspruch.

Insbesondere ist Y/Γ kein Hausdorff-Raum, da in einem solchen jeder Punkt abgeschlossen ist. □

6 Kompakte Untermannigfaltigkeiten von $\mathcal{H}_{g,k}$

Wir hatten nach dem Beweis von Lemma 4.16 erwähnt, dass $\mathcal{H}_{g,0} \subseteq U_1$ ist. U_1 ist wiederum isomorph zu einer offenen Teilmenge eines $\mathbb{C}^n$. Wir können $\mathcal{H}_{g,0}$ also als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^n$ betrachten. Das bedeutet unter anderem, dass jede kompakte, komplexe Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{H}_{g,0}$ die Dimension Null hat (vgl. [FG, Seite 157]).
Ziel dieses Kapitels ist es zu zeigen, dass dies im Fall $0 < k < g$ nicht stimmt. Dazu konstruieren wir explizit eine kompakte, komplexe Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{H}_{g,k}$. Wir betrachten die orthogonale Gruppe

$$O_{2g}(\mathbb{R}) := \{A \in Mat_{2g\times 2g}(\mathbb{R})|\ A^T = A^{-1}\}.$$

Diese ist offenbar abgeschlossen in $Mat_{2g\times 2g}(\mathbb{C})$ und beschränkt, da kein Eintrag einer orthogonalen Matrix betragsmäßig größer als Eins sein kann. Nach dem Satz von Heine-Borel ist $O_{2g}(\mathbb{R})$ somit kompakt. $K := O_{2g}(\mathbb{R}) \cap Sp_{2g}(\mathbb{R})$ ist also eine abgeschlossene Untergruppe von $Gl_{2g}(\mathbb{C})$, und somit ist es eine glatte Untermannigfaltigkeit von $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ (vgl. [FDM, Seite 97]).

Nach [FDM, Seite 120] existieren komplexe Strukturen auf $Sp_{2g}(\mathbb{C})/Stab[(E_g|0)]$ und auf $Sp_{2g}(\mathbb{C})/Stab[(E_g|iI_k)]$, sodass, unter anderem, die kanonischen Projektionen jeweils holomorph sind. Wir haben in Lemma (4.24) gesehen, dass $Sp_{2g}(\mathbb{C})$ transitiv auf $\mathcal{H}_g$ wirkt, und erhalten somit, nach [FDM, Seite 123], Isomorphismen von komplexen Mannigfaltigkeiten $Sp_{2g}(\mathbb{C})/Stab[(E_g|0)] \cong \mathcal{H}_g \cong Sp_{2g}(\mathbb{C})/Stab[(E_g|iI_k)]$. In [FDM] werden diese beiden Sätze zwar nur für glatte Mannigfaltigkeiten bewiesen, die Beweise lassen sich allerdings problemlos auf komplexe Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Sei

$$\pi : \; Sp_{2g}(\mathbb{C}) \to Sp_{2g}(\mathbb{C})/Stab[(E_g|iI_k)]$$

die kanonische Projektion. Dann haben wir in Satz (4.22) gesehen, dass $\mathcal{H}_{g,k} \cong \pi(Sp_{2g}(\mathbb{R}))$ ist. Solche Projektionen haben unter anderem die Eigenschaft, dass Bilder von glatten Untermannigfaltigkeiten wieder Untermannigfaltigkeiten sind (vgl. [Lee, Seiten 110 und 165]). Damit ist $\pi(Sp_{2g}(\mathbb{R}) \cap O_{2g}(\mathbb{R}))$ eine kompakte, reelle Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{H}_{g,k}$. Wir wollen nun zeigen, dass diese eine komplexe, kompakte und nicht-triviale Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{H}_{g,k}$ ist.

Lemma 6.1. *Die Einbettung $Gl_g(\mathbb{C}) \to Gl_{2g}(\mathbb{R})$ induziert einen Homöomorphismus*

$$U_g(\mathbb{C}) \simeq O_{2g}(\mathbb{R}) \cap Sp_{2g}(\mathbb{R})$$

.

Beweis. Die Einbettung ist gegeben durch $A + iB \mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$. Wir fassen $Gl_g(\mathbb{C})$ bzw. $Gl_{2g}(\mathbb{R})$ als die Menge aller $\mathbb{C}$- bzw. $\mathbb{R}$-linearen Automorphismen von $\mathbb{C}^g$ auf. Wählen wir für $\mathbb{C}^n$ die reelle Basis $(e_1, \ldots, e_g, ie_1, \ldots, ie_g)$, dann entspricht unsere Einbettung genau der Teilmengenbeziehung $Aut_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^g) \subseteq Aut_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^g)$. Die Multiplikation mit i ist somit gegeben durch die Matrix $J = \begin{pmatrix} 0 & -E_g \\ E_g & 0 \end{pmatrix}$. Eine reelle Matrix entspricht genau dann einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung, wenn sie mit J kommutiert. Setzen wir die orthogonale Bedingung $A^T = A^{-1}$ in die symplektische Bedingung $A^T JA = J$ ein, erhalten wir, dass $O_{2g}(\mathbb{R}) \cap Sp_{2g}(\mathbb{R}) \subseteq Gl_g(\mathbb{C})$ ist. Sei s das komplexe Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^g$. Dann ist die unitäre Gruppe gegeben durch

$$\{A \in Aut_C(\mathbb{C}^g)|\; s(A(v), A(w)) = s(v, w) \;\forall v, w \in \mathbb{C}^g\}.$$

Die $\mathbb{R}$-bilinearen Abbildungen $(v, w) \mapsto Re(s(v, w))$ bzw. $(v, w) \mapsto Im(s(v, w))$ sind gegeben durch die Matrizen E_{2g} bzw. J. Somit ist die orthogonale Gruppe gegeben durch $\{A \in Aut_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^g)|\; Re(s(A(v), A(w))) = Re(s(v, w)) \;\forall v, w \in \mathbb{C}^g\}$ und die symplektische Gruppe ist gegeben durch $\{A \in Aut_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^g)|\; Im(s(A(v), A(w))) = Im(s(v, w)) \;\forall v, w \in \mathbb{C}^g\}$. Aus dieser Perspektive ist die zu zeigende Aussage trivial. □

Die unitäre Gruppe, und damit auch K, ist zusammenhängend (vgl. [Kn, Seite 113]) Wollen wir nun zeigen, dass $\pi(K)$ nicht nulldimensional ist, dann genügt es zu beweisen, dass es aus mehreren Elementen besteht.

Lemma 6.2. *Sei $0 < k < g$. Dann ist $dim(\pi(K)) > 0$ als reelle Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass ein Element $x \in K \setminus Stab[(E_g|iI_k)]$ existiert. Wir haben die Menge $Stab[(E_g|iI_k)] \cap Sp_{2g}(\mathbb{R})$ bereits in Lemma (4.22) berechnet.

$$Stab[(E_g|iI_k)] = \left\{ \begin{pmatrix} a & -I_k c I_k \\ c & I_k a I_k \end{pmatrix} \in Mat_{2g\times 2g}(\mathbb{C}) \middle| \begin{matrix} a^T c = c^T a \\ a^T I_k a + c^T I_k b = I_k \end{matrix} \right\}$$

Sei $E_{ij} = (\delta_{ij})$ die Matrix, welche an der Stelle (i,j) eine Eins und sonst überall Nullen hat. Wir definieren die Matrix

$$M := \sum_{1<i<g} E_{ii} + \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{11} + E_{gg}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1g} - E_{g1}).$$

Im Fall $g = 4$ ist

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Die Spalten von M bilden eine Orthonormalbasis, und somit ist M orthogonal. Damit ist $X := \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{T^{-1}} \end{pmatrix}$ ebenfalls orthogonal, und wir haben im Beweis von Lemma (4.19) gesehen, dass sie symplektisch ist. Also $X \in K$. Allerdings ist $M \neq I_k M I_k$, und somit ist $X \notin Stab[(E_g|iI_k)]$. □

Somit müssen wir nur noch zeigen, dass $\pi(K)$ sogar eine komplexe Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{H}_{g,k}$ ist. Dazu müssen wir elementares Wissen über Lie-Gruppen, Lie-Algebren und über die Exponentialabbildung voraussetzen, z.B. [Kn]. Weiterhin verwenden wir, ohne Beweis, das folgende Kriterium (vgl. [RC, Seite 14]).

Satz 6.3. *Sei N eine reelle Untermannigfaltigkeit einer komplexen Mannigfaltigkeit M und seien J_p die komplexen Strukturen auf den reellen Tangentialräumen T_pM von M. Dann ist N genau dann eine komplexe Untermannigfaltigkeit von M, falls $J_p(T_pN) = T_pN$ für alle $p \in N$ erfüllt ist.*

Wir identifizieren den reellen Tangentialraum von $Gl_n(\mathbb{C})$ im Punkt E_n, also die Lie-Algebra, mit $Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$. Die Exponentialabbildung ist dann gegeben durch die Matrizenexponentialabbildung:

$$\begin{aligned} exp : Mat_{n\times n}(\mathbb{C}) &\rightarrow Gl_n(\mathbb{C}) \\ A &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \end{aligned}$$

Die komplexe Struktur auf $Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ ist gegeben durch $J(A) = iA$. Wir berechnen zunächst die Lie-Algebren der symplektischen Gruppen. Sie sind gegeben, für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, durch die Mengen

$$\{X \in Mat_{2g\times 2g}(\mathbb{C}) |\ exp(tX) \in Sp_{2g}(\mathbb{K})\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Für differenzierbare, Matrizenwertige Funktionen

$$A, B :\ \mathbb{R} \rightarrow Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$$

gilt die Produktregel

$$\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = (\frac{d}{dt}A(t))B(t) + A(t)(\frac{d}{dt}B(t)).$$

Dies folgt aus der Produktregel für reellwertige Funktionen.

Lemma 6.4. *[KlG, Seite 109] Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sei $\mathfrak{sp}_{2g}(\mathbb{K})$ die Lie-Algebra von $Sp_{2g}(\mathbb{K})$. Dann ist*

$$\mathfrak{sp}_{2g}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a^T \end{pmatrix} \in Mat_{2g\times 2g}(\mathbb{K}) \middle|\ c = c^T, b = b^T \right\}.$$

Beweis. Sei $Z := \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix}$ und sei $X \in Mat_{2g\times 2g}(\mathbb{K})$ beliebig. Wir betrachten, für $t \in \mathbb{R}$, die Gleichung :

$$Z = exp(tX)^T Zexp(tX)$$

Ableiten nach t im Punkt $t = 0$ ergibt nun:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(exp(tX)^T Zexp(tX))_{|t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(exp(tX^T))_{|t=0} Zexp(0) + exp(0)Z\frac{d}{dt}(exp(tX))_{|t=0} \\ &= X^T Z + ZX \end{aligned}$$

Matrizen in $\mathfrak{sp}_{2g}(\mathbb{K})$ erfüllen also $X^T Z + ZX = 0$. Sei andersherum X eine Matrix, welche $X^T Z + ZX = 0$ erfüllt, dann ist, nach der selben Rechnung wie oben, der Term $exp(tX)^T Zexp(tX)$ konstant in t. Für $t = 0$ ist $exp(tX)^T Zexp(tX) = Z$, und somit ist $X \in \mathfrak{sp}_{2g}(\mathbb{K})$. Wir erhalten also die Äquivalenz $X \in \mathfrak{sp}_{2g}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow X^T Z + ZX = 0$.

Sei $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann ist

$$X^T Z = \begin{pmatrix} a^T & c^T \\ b^T & d^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^T & a^T \\ -d^T & b^T \end{pmatrix}$$

und

$$ZX = \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also die Bedingungen $c = c^T$, $d = -a^T$ und $b = b^T$, was zu zeigen war. □

Lemma 6.5. *Sei $\mathfrak{k}$ die Lie-Algebra von K. Dann ist*

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{sp}_{2g}(\mathbb{R}) |\ X^T = -X\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \middle| \ a = -a^T, b = b^T \right\}$$

Beweis. Die Exponentialabbildung erfüllt $exp(-A) = exp(A)^{-1}$ und $exp(A^T) = exp(A)^T$ (vgl. [KlG, Seite 102]). Damit übersetzt sich die Bedingung $exp(A)^{-1} = exp(A)^T$ zu $-A = A^T$. □

Im Folgenden sei

$$\begin{aligned} G &:= Sp_{2g}(\mathbb{C}) \\ Q &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in Sp_{2g}(\mathbb{R}) \right\} = Stab[(E_g|0)] \quad (vgl. \text{ Satz } (4.24)) \\ Q_z &:= Stab[(E_g|iI_k)] \end{aligned}$$

und seien $\mathfrak{g}, \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_z$ die jeweiligen Lie-Algebren. Uns interessieren die Tangentialräume von G/Q_z.

Lemma 6.6. *Sei $\pi : G \to G/Q_z$ die kanonische Projektion und sei V der Tangentialraum von G/Q_z im Punkt $E_{2g}Q_z$. Dann existiert ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen $V \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{q}_z$. Bezüglich diesem Isomorphismus ist $d\pi_{E_{2g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{q}_z$ gegeben durch $X \mapsto X + \mathfrak{q}_z$. Die komplexe Struktur auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}_z$ ist $J(X + \mathfrak{q}_z) = (iX) + \mathfrak{q}_z$.*

Beweis. π ist holomorph, somit ist $d\pi(E_{2g})$ $\mathbb{C}$-linear. $d\pi(E_{2g})$ ist außerdem surjektiv (vgl. [Lee, Seite 165]). somit genügt es zu zeigen, dass $ker(d\pi(E_{2g})) = \mathfrak{q}_z$.

$$\begin{aligned} & X \in \mathfrak{q}_z \\ \Leftrightarrow\ & exp(tX) \in Q_z \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & \pi(exp(tX)) = 0 \text{ konstant} \\ \Leftrightarrow\ & X \in ker(d\pi(E_{2g})) \end{aligned}$$

Die Gleichung $J(X + \mathfrak{q}_z) = (iX) + \mathfrak{q}_z$ folgt sofort aus der $\mathbb{C}$-Linearität von $d\pi(E_{2g})$. $\square$

Wir benötigen also nur noch den Tangentialraum $\mathfrak{q}_z$. Diesen können wir leider nicht explizit berechnen, es stellt sich aber heraus, dass uns die Kenntnis über eine genügend große Teilmenge bereits ausreicht.

Lemma 6.7. *Sei* $S := \begin{pmatrix} E_g & iI_k \\ 0 & E_g \end{pmatrix}$. *Es gilt:*

- $S\mathfrak{q}_z S^{-1} = \mathfrak{q}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & -A^T \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \,\middle|\, B = B^T \right\} \subseteq \mathfrak{q}$

Beweis.
- Die Exponentialabbildung erfüllt $exp(SXS^{-1}) = Sexp(X)S^{-1}$ (vgl. [KlG, Seite 102]). Somit genügt es zu zeigen, dass $SQ_zS^{-1} = Q$ gilt. Offenbar ist S eine symplektische Matrix mit $[(E_g|0)]S = [(E_g|iI_k)]$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & X \in Q_z \\ \Leftrightarrow \quad & [(E_g|iI_k)]X = [(E_g|iI_k)] \\ \Leftrightarrow \quad & [(E_g|0)]SX = [(E_g|0)]S \\ \Leftrightarrow \quad & [(E_g|0)]SXS^{-1} = [(E_g|0)] \\ \Leftrightarrow \quad & SXS^{-1} \in Q \end{aligned}$$

- Es gilt $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & -A^T \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ * & (-A^T)^2 \end{pmatrix}$. Induktiv erhalten wir

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & -A^T \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A^n & 0 \\ * & (-A^T)^n \end{pmatrix} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Hieraus folgt

$$exp \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & -A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} exp(A) & 0 \\ * & exp(-A^T) \end{pmatrix} \in Q(vgl.Lemma(4.24))$$

$\square$

Das Inverse von S ist gegeben durch $S^{-1} = \begin{pmatrix} E_g & -iI_k \\ 0 & E_g \end{pmatrix}$. Der Tangentialraum an $\pi(K)$ im Punkt $E_{2g}Q_z$ ist gegeben durch $d\pi(E_{2g})(\mathfrak{k})$, also durch die Menge

$$\mathfrak{k}/\mathfrak{q}_z := \{X + \mathfrak{q}_z \in \mathfrak{g}/\mathfrak{q}_z | \ X \in \mathfrak{k}\}.$$

Damit können wir nachrechnen, dass zumindest dieser Tangentialraum invariant unter der komplexen Struktur ist.

Satz 6.8. *Es gilt $J(\mathfrak{k}/\mathfrak{q}_z) = \mathfrak{k}/\mathfrak{q}_z$, wobei J die komplexe Struktur auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}_z$ ist.*

Beweis. Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{k}$ beliebig. Aus Lemma (6.5) ist bekannt, dass dann $a = -a^T$ und $b = b^T$ gilt. Wir wollen zeigen, dass $J(M + \mathfrak{q}_z) = iM + \mathfrak{q}_z \in \mathfrak{k}/\mathfrak{q}_z$. Das bedeutet, dass ein $N = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in \mathfrak{k}$ existiert mit $iM - N \in \mathfrak{q}_z$. $N \in \mathfrak{k}$ ist äquivalent zu $-N \in \mathfrak{k}$. Somit können wir stattdessen $iM + N \in \mathfrak{q}_z$ schreiben, was nach Lemma (6.7) äquivalent zu $S(iM+N)S^{-1} \in \mathfrak{q}$ ist. Diesen Term werden wir nun einmal ausmultiplizieren.

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} E_g & iI_k \\ 0 & E_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c+ia & d+ib \\ -(d+ib) & c+ia \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_g & -iI_k \\ 0 & E_g \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} c+ia-iI_k(d+ib) & d+ib+iIk(c+ia) \\ -(d+ib) & c+ia \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_g & -iI_k \\ 0 & E_g \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} c+ia-iI_k(d+ib) & * \\ -(d+ib) & iI_k(d+ib)+c+ia \end{pmatrix}, \text{ wobei}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
* &= [c+ia-iI_k(d+ib)](-iI_k) + d + ib + iIk(c+ia) \\
&= aI_k - I_k dI_k + d - I_k a + i[-cI_k - I_k bI_k + b + I_k c] \\
&= (a - I_k d)I_k - I_k(a - I_k d) + i[I_k(c + I_k b) - (c + I_k b)I_k]
\end{aligned}$$

Damit diese Matrix in $\mathfrak{q}$ liegt, genügt es nach Lemma (6.7) zu zeigen, dass $* = 0$ gilt. Wir betrachten zunächst den Realteil:

$$(a - I_k d)I_k - I_k(a - I_k d) = 0$$

Wir müssen also zu einer gegebenen, schiefsymmetrischen Matrix a eine symmetrische Matrix d angeben, sodass $(a - I_k d)$ mit I_k kommutiert. Multiplikation von links mit I_k ändert das Vorzeichen der letzten k Zeilen und Multiplikation von rechts ändert das Vorzeichen der letzten k Spalten. Somit kommutiert eine Matrix genau dann mit I_k, wenn sie von der Form $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ für eine $k \times k$-Matrix t und eine $g-k \times g-k$-Matrix s ist. Sei $a = (a_{ij})$ und $d = (d_{ij})$. Wir definieren $d_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & \text{für } i < j \\ -a_{ij} & \text{für } i \geq j \end{cases}$.
Da a schiefsymmetrisch ist, ist d symmetrisch. Schauen wir uns nun die Einträge von $(a - I_k d)$ an den relevanten Stellen an. Sei $i \in \{g-k+1, \ldots, g\}$ und $j \in \{1, \ldots, g-k\}$. Dann ist $(I_k d)_{ij} = -dij = a_{ij}$. Somit ist $(a - I_k d)_{ij} = 0$. Sei andererseits $j \in \{g-k+1, \ldots, g\}$ und $i \in \{1, \ldots, g-k\}$. Dann ist $(I_k d)_{ij} = d_{ij} = a_{ij}$, und somit $(a - I_k d)_{ij} = 0$.
Wir haben also gezeigt, dass $a - I_k d$ von der Form $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ ist, und von daher mit I_k

kommutiert.
Der Beweis, dass man c so wählen kann, dass $c + I_k b$ mit I_k kommutiert, geht analog. □

Es bleibt zu zeigen, dass alle anderen Tangentialräume auch invariant unter den jeweiligen komplexen Strukturen sind.

Satz 6.9. *$\pi(K)$ ist eine komplexe Untermannigfaltigkeit von G/Q_z.*

Beweis. Sei $t \in K$ beliebig und sei V der Tangentialraum von G/Q_z im Punkt tQ_z. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f: G/Q_z &\to G/Q_z \\ xQ_z &\mapsto txQ_z \end{aligned}$$

Diese ist biholomorph und erfüllt $f(\pi(K)) = \pi(K)$. Damit ist $df(E_{2g}Q_z): \mathfrak{g}/\mathfrak{q}_z \to V$ ein $\mathbb{C}$-linearer Isomorphismus welcher den Tangentialraum von $\pi(K)$ im Punkt $E_{2g}Q_z$ auf den Tangentialraum von $\pi(K)$ im Punkt tQ_z abbildet. Damit ist letzterer ebenfalls invariant unter der entsprechenden komplexen Struktur. Nach Satz (6.3) ist $\pi(K)$ damit eine komplexe Untermannigfaltigkeit von G/Q_z. □

Korollar 6.10. *Die komplexe Mannigfaltigkeit $G/Q_z \cong \mathcal{H}_{g,k} \simeq C_k(Sp_{2g}(\mathbb{R}))$ besitzt genau dann eine kompakte, komplexe Untermannigfaltigkeit mit von Null verschiedener Dimension, wenn $0 < k < g$.*

Beweis. $\pi(K)$ ist in jedem Fall eine kompakte, komplexe Untermannigfaltigkeit. Im Fall $0 < k < g$ ist, nach Lemma (6.2), $dim(\pi(K)) > 0$. Andererseits haben wir uns bereits überlegt, dass $\mathcal{H}_{g,k}$ im Fall $k = 0$ oder $k = g$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^m$ ist, und somit keine kompakte, komplexe Untermannigfaltigkeit mit von Null verschiedener Dimension besitzen kann. □

Literatur

[ASAG] Borel, Armand; Harish-Chandra (1962): Arithmetic Subgroups of Algebraic Groups. Annals of Mathematics, Second Series, Vol.75

[BLA] Bosch, Siegfried (2006): Lineare Algebra. Auflage 3, Springer-Verlag Berlin Heidelberg

[Bo] Bosch, Siegfried (2013): Algebra. Auflage 8, Springer Berlin Heidelberg

[CAV] Birkenhake, Christina; Lange, Herbert (2004): Complex Abelian Varieties. Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg

[CT] Birkenhake, Christina; Lange, Herbert (1999): Complex Tori. Springer Science+Business Media New York

[DiG] Siegel, Carl L. (1943): Discontinuous Groups. Annals of Mathematics Vol.44

[FDM] Warner, Frank W. (1983): Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Springer-Verlag New York

[FG] Fritzsche, Klaus; Grauert, Hans (2002): From Holomorphic Functions to Complex Manifolds. Springer New York Berlin Heidelberg

[F1] Freitag, Eberhard; Busam, Rolf (2006): Funktionentheorie 1. Auflage 4, Springer Berlin Heidelberg New York

[F2] Freitag, Eberhard (2014): Funktionentheorie 2, Auflage 2, Springer Berlin Heidelberg

[LA] Fischer, Gerd (2014): Lineare Algebra. Auflage 6, Springer Fachmedien Wiesbaden

[KlG] Hein, Wolfgang (1990): Einführung in die Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen. Springer-Verlag Berlin Heidelberg

[Kn] Knapp, Anthony W. (2005): Lie Groups Beyond an Introduction. Second Edition, Birkhäuser

[Lee] Lee, John M. (2013): Introduction to Smooth Manifolds. Second Edition, Springer New York Heidelberg Dordrecht London

[OD] Deiser, Oliver (2010): Einführung in die Mengenlehre. Auflage 3, Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg Berlin

[RC] Baouendi, M. Salah; Ebenfelt, Peter; Rothschild, Linda Preiss (1999): Real Submanifolds in Complex Space and their Mappings, Princeton University Press

[Top] Laures, Gerd; Szymik Markus (2015): Grundkurs Topologie. Auflage 2, Springer-Verlag Berlin Heidelberg

[WT] Klenke, Achim (2013): Wahrscheinlichkeitstheorie. Auflage 3, Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Eidesstattliche Versicherung

Ich versichere an Eides statt durch meine Unterschrift, dass ich die vorstehende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe angefertigt und alle Stellen, die ich wörtlich oder annähernd wörtlich aus Veröffentlichungen entnommen habe, als solche kenntlich gemacht habe, mich auch keiner anderen als der angegebenen Literatur oder sonstiger Hilfsmittel bedient habe. Die Arbeit hat in dieser oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Ort, Datum   Unterschrift