Prof. Dr. Ulrich Görtz
Wintersemester 2021/22

Seminar über algebraische Kurven

Thema das Seminars ist die Theorie die algebraischen Kurven. Dies ermöglicht einen Einstieg in die algebraische Geometrie, der mit relativ wenigen Vorkenntnissen und ohne einen großen technischen Apparat aufzubauen zu schönen Ergebnissen wie dem Satz von Bézout, dem Satz von M. Noether und einigen Anwendungen führt.

1. Organisatorisches

— Siehe auch die Moodle-Seite zum Seminar. —

Termin. Dienstags, 14–16 Uhr, N-U-4.04. Beginn: 11.10.

ECTS-Punkte. Das Seminar ist ein Bachelor-Seminar in den Fachstudiengängen Mathematik (6 credit points).

Kontakt.
Für organisatorische Fragen: `ulrich.goertz@uni-due.de`.
Bei mathematischen Fragen zu Ihrem Vortrag unterstützt Sie Herr Dr. Heer Zhao, `heer.zhao@uni-due.de`.

Die Seminarvorträge sollen an der Tafel gehalten werden und nicht länger als 80 Minuten dauern. Rechnen Sie bei der Planung mit Fragen der Zuhörer:innen und der Organisatoren. Danach stehen circa 10 Minuten für Fragen und eine Rückmeldung zum Vortrag zur Verfügung.

Im Nachgang eine schriftliche Ausarbeitung Ihres Vortrags abzugeben, ist nicht erforderlich (und kann auch nicht als Ersatz für einen erfolgreichen Vortrag dienen).

Für das Seminar gilt (moralische) Anwesenheitspflicht; es wird eine *aktive Teilnahme* erwartet. Für den Fall, dass Sie an einem Termin aus wichtigen Gründen verhindert sind, entschuldigen Sie sich bitte vorher bei der/dem Vortragenden und bei mir.

Erforderliche Vorkenntnisse. Gute Kenntnisse der Linearen Algebra und Algebra.

Kenntnisse in Algebra 2 (Kommutative Algebra) setzen wir insoweit voraus, wie sie in der Vorlesung Algebra 2 im Sommersemester 2022 behandelt wurden. Vieles davon wird allerdings in Fultons Buch besprochen bzw. wiederholt, so dass es “notfalls” möglich ist, diese Sachen parallel zum Seminar zu lernen. Dafür sollten Sie aber gegebenenfalls genügend Zeit einplanen, denn die meisten Themen aus der Algebra 2 treten hier auch wieder auf.

Idealerweise besuchen Sie parallel zu dem Seminar die Vorlesung Algebraische Geometrie (oder haben diese bereits früher besucht), weil in der Vorlesung einige Begriffe (wie der der Varietät) noch konzeptioneller und gründlicher eingeführt werden, andererseits weil das Seminar Anschauungsmaterial für die Begriffe der Vorlesung bietet.

2. Anforderungen / Wie halte ich einen guten Seminarvortrag?

- Richten Sie die Vorbereitung auf Ihren Vortrag nach dem Grundsatz aus, dass Ihre Zuhörer möglichst viel dabei lernen und „aus dem Vortrag mitnehmen“ sollen.
- Ihr erstes und wichtigstes Ziel sollte sein, die im Vortrag zu behandelnde Mathematik gründlich zu verstehen. Das wird in der Regel eine ganz Menge Zeit in Anspruch nehmen; beginnen Sie daher frühzeitig mit Vorbereitung!
- Stellen Sie viele Fragen (sich und den anderen Seminarteilnehmer:innen). Seien Sie diszipliniert darin, sich zu fragen, warum (ob) die im zugrundeliegenden Text aufgestellten Behauptungen richtig sind. Was lässt sich vereinfachen? Wenn Sie auf Dinge stoßen, die Sie nicht verstehen, fragen Sie die anderen Seminarteilnehmer:innen (diejenigen, die die Vorträge direkt vor oder nach Ihnen halten, haben sich vielleicht schon genau dieselbe Frage gestellt). Vielleicht ist im Buch ein Fehler? Wenn Sie damit noch nicht weiterkommen, vereinbaren Sie einen Termin mit dem Assistenten, der das Seminar betreut. (Bei diesem Seminar Herr Dr. Heer Zhao, `heer.zhao@uni-due.de`.)
- Wenn Sie die Mathematik verstanden haben, sollten Sie bewusst darüber nachdenken, wie Sie die Inhalte in Ihrem Vortrag darstellen möchten. Oft bietet es sich an, den Aufbau zu ändern, Sachen umzustrukturieren, zusätzliche Beispiele einzubauen, die Notation anzupassen, usw. — schließlich ist ein Vortrag etwas ganz anderes als ein geschriebener Text. Diese Restrukturierung ist Teil der Anforderung an Ihren Vortrag. Es genügt nicht, den Text aus dem Buch zu übersetzen und an die Tafel zu schreiben!
- Überlegen Sie im Vorfeld, was die Hauptpunkte Ihres Vortrags sind, die jede:r Teilnehmer:in lernen sollte, und berücksichtigen Sie das entsprechend. Sie können nötigenfalls Sachen im Vortrag auslassen (zum Beispiel eine technische Rechnung, die zum Verständnis nicht notwendig ist (schauen Sie sie sich trotzdem genau an, um gegebenenfalls Fragen beantworten zu können!)). Denken Sie bei der Vortragsplanung darüber nach, was sich zum Weglassen eignet, damit Sie nicht am Ende wegen Zeitmangels gezwungen sind, die interessantesten Teile zu überspringen.
- Denken Sie insbesondere darüber nach, was ein guter Einstieg in den Vortrag ist. Wie fügt er sich ins Seminarprogramm ein? Warum sollte man sich für dieses Thema interessieren? Bereiten Sie auch einen guten Abschluss des Vortrags vor.
- Die Sachen, die Sie in der Vorbereitung besonders viel Zeit gekostet haben, sollten Sie nicht auslassen, denn die anderen Teilnehmer:innen haben vermutlich ähnliche Schwierigkeiten beim Verständnis und können gerade an diesen Stellen viel lernen. Wenn doch einmal noch Fragen bei Ihnen offengeblieben sind, gehen Sie damit ehrlich um und versuchen Sie nicht, Probleme beim Verständnis zu verschleiern.

- In unserer Quelle gibt es viele Übungsaufgaben, die teilweise dann auch in späteren Kapiteln (bzw. Vorträgen) benötigt werden. Diese Aufgaben sind mit * gekennzeichnet und gehören in der Regel zum Vortragsstoff dazu. Wenn in Ihrem Vortrag Ergebnisse von Übungsaufgaben verwendet werden, die doch noch nicht behandelt wurden, gehört es zur Vorbereitung Ihres Vortrags, die entsprechenden Aufgaben zu lösen.
- **Aktive Einbindung der Teilnehmer:innen.** Das Seminar lebt von der aktiven Beteiligung aller Teilnehmer:innen an *allen* Vorträgen, nicht nur am eigenen. Die Beteiligung an den anderen Vorträgen ist eine Möglichkeit, Ihre Note im Seminar gegebenenfalls noch zu verbessern.

  Die Beteiligung aller sicherzustellen, ist sowohl eine Aufgabe der Zuhörer:innen als auch der Sprecher:in. Konkret ist daher eine der Anforderungen an einen erfolgreichen Vortrag: Überlegen Sie sich mindestens drei Fragen, die Sie während Ihres Vortrags an das Publikum richten. Es kann sich um offene Fragen oder um Multiple-Choice-Fragen handeln. Wählen Sie Fragen aus, die sich von denjenigen, die dem Vortrag gefolgt sind, relativ schnell beantworten lassen, und die Ihnen ermöglichen, auf einen besonders wichtigen Punkt noch einmal hinzuweisen und/oder helfen zu entscheiden, was Sie vielleicht noch einmal anders/erneut erklären sollten oder worauf Sie im weiteren Verlauf den Fokus legen.

Wenn Sie Ihren Vortrag in den Grundzügen vorbereitet haben, und *spätestens zwei Wochen vor dem Termin Ihres Vortrags* sprechen Sie Ihren Vortrag mit Herrn Zhao durch. Dabei können Sie offene Fragen von Ihrer Seite klären. (Wenn Sie gar keine Fragen haben, sollten Sie noch einmal sehr selbstkritisch hinterfragen, ob Sie die Inhalte des Vortrag mathematisch wirklich hinreichend durchdrungen haben. Es ist für den Verlauf des Vortrag besser und auch für Sie angenehmer, wenn Sie nicht erst bei Nachfragen während des Vortrags feststellen, dass es doch noch Verständnislücken gibt.)

Auch wenn es viel Arbeit sein wird, kann und soll es Spaß machen, an dem Seminar teilzunehmen. Dabei steht im Vordergrund, dass alle Teilnehmer:innen gemeinsam etwas lernen! Daher sollten Sie als Sprecher:in Fragen im Vortrag immer willkommen heißen und als Unterstützung dabei sehen, Ihren Vortrag auf die Bedürfnisse der Teilnehmer:innen auszurichten. Umgekehrt: Geben Sie sich als Zuhörer:in Mühe, den Vorträgen der anderen aktiv zu folgen und stellen Sie dort Fragen, wo Sie etwas nicht verstehen.

Nutzen Sie die Möglichkeit, Ihre eigenen Schwerpunkte zu setzen und überlegen Sie sich, wie Sie Ihren eigenen Vortrag so gestalten können, dass Sie damit zufrieden sind.

3. Literatur

Wir richten uns nach dem Buch [Fu] von W. Fulton. Bei den Vortragsbeschreibungen im Programm unten gilt grundsätzlich Folgendes:

- Ein Vortrag ist etwas anderes als ein Buch, das heißt: Orientieren Sie sich inhaltlich am Text des Buchs, aber strukturieren Sie diese Inhalte so, wie es für einen Vortrag sinnvoll ist. Zum Beispiel kommen bei Fulton viele Definition etwas versteckt im Text, und in der Regel sollten Sie diese im Vortrag als „richtige“ Definition anschreiben. Andererseits müssen (und sollten) Sie im Vortrag nicht alles, was im Buch steht, an die Tafel schreiben. Teils genügt eine mündliche Erklärung, und bei den Sachen, die Sie anschreiben, können Sie geeignet abkürzen.
- Wenn nötig (bzw. wenn Sie es für sinnvoll halten), führen Sie Begriffe aus früheren Abschnitten im Buch ein bzw. wiederholen Sie diese; auch dann, wenn die Abschnitte nicht im Programm vorkamen (in der Regel, weil die Inhalte im wesentlichen aus der Algebra 2 bekannt sind).
- Wenn nichts anderes gesagt wird, gehören die mit * gekennzeichneten Übungsaufgaben zum Inhalt des Vortrags dazu. Wenn es zeitlich sonst nicht passt, müssen Sie eine Auswahl treffen, aber Sie sollten sich auf jeden Fall alle diese Aufgaben anschauen und mindestens einige davon auch in den Vortrag aufnehmen. Viele sind sehr einfach und können praktisch im Vorübergehen an der richtigen Stelle im Vortrag miterledigt werden.

Es gibt eine ganze Reihe von anderen Büchern über (ebene) algebraische Kurven, die mehr oder weniger dasselbe Material auch enthalten (zum Beispiel von Brieskorn/Knörrer; Fischer; Kunz; die lecture notes[1] von Gathmann), aber eigentlich sollten Sie diese nicht benötigen.

Einige wichtige Begriffe, deren Bedeutung (oder Übersetzung auf Deutsch) vielleicht nicht direkt klar sind:

- (im Zusammenhang mit Abbildungen) heißt *onto*, dass die Abbildung surjektiv ist (zum Beispiel: f maps onto Y, $f\colon X \to Y$ is onto); *into* ist nur eine Aussage über den Wertebereich und bedeutet nicht, dass die Abbildung injektiv sein muss; *one-to-one*, dass die Abbildung injektiv ist (aber nicht unbedingt bijektiv).
- form – homogenes Polynom, also ein Polynom, in dem alle Monome mit Koeffizient $\neq 0$ denselben Grad haben,
- UFD (unique factorization domain) – faktorieller Ring,
- PID (principal ideal domain) – Hauptidealring,
- DVR (discrete valuation ring) – diskreter Bewertungsring.

4. Vorträge

Vortrag 1 (Einführung)**.**

Einführung in das Seminarthema.

Vortrag 2 (Der affine Raum und algebraische Mengen)**.**

Inhalt des Vortrags: [Fu] §§1.2, 1.3, 1.4.

[1] `https://www.mathematik.uni-kl.de/ gathmann/en/curves.php`

Anmerkungen: Erinnern Sie daran, dass die am Ende von §1.2 gezeigten Eigenschaften insbesondere zeigen, dass die Mengen $V(I)$ die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\mathbb{A}^n(k)$ bilden. Den Hilbertschen Basissatz (wie in §1.4) haben wir in der Algebra 2 bewiesen; Sie sollten aber die „geometrische Interpretation", also Theorem 1 in Abschnitt §1.4, angeben und kurz erklären, warum sie aus dem Satz folgt. Die Aussagen von Aufgabe 1.22 sollten größtenteils bekannt sein; das können Sie also entsprechend abkürzen.

Vortrag 3 (Der Nullstellensatz)**.**

Inhalt des Vortrags: [Fu] §§1.5, 1.6, 1.7.

Anmerkungen: Das Lemma aus §1.5 kennen wir schon. Den „schwachen Nullstellensatz" haben wir in der Algebra 2 bewiesen, und Sie sollten an dieser Stelle nur noch einmal an die Aussage erinnern, und dann den „starken" Nullstellensatz (in der Form $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{a}$, für k algebraisch abgeschlossen) und die Korollare dazu angeben und aus der schwachen Form folgern. Aufgabe 1.37 können Sie auslassen, denn das ist uns bekannt; Aufgabe 1.38 sollten Sie aber behandeln.

Vortrag 4 (Der Koordinatenring)**.**

Inhalt des Vortrags: [Fu] §§2.1, 2.2, 2.3, 2.4.

Anmerkungen: Bei den Aufgaben müssen Sie wahrscheinlich eine Auswahl treffen. Erklären Sie, dass $\mathscr{O}_P(V)$ die Lokalisierung von $\Gamma(V)$ im maximalen Ideal $\mathfrak{m}_P$ ist. Damit ist dann Proposition 3 in Abschnitt 2.4 mit dem, was wir bereits wissen, klar. Das Lemma davor ist uns auch bekannt, so dass Sie darauf nicht eingehen müssen.

Vortrag 5 (Diskrete Bewertungsringe und endliche algebraische Mengen)**.**

Inhalt des Vortrags: [Fu] §§2.5, 2.6, 2.8, 2.9.

Anmerkungen: Eine *order function* (Aufgabe 2.28) nennt man auch (und normalerweise) *discrete valuation*, auf Deutsch: *diskrete Bewertung*. Der Hauptteil des Vortrags ist Abschnitt 2.9; dafür sollten Sie bei Ihrer Zeitplanung für den Vortrag genügend Zeit vorsehen.

Vortrag 6 (Multiplizität eines Punktes auf einer Kurve)**.**

Inhalt des Vortrags: [Fu] §§3.1, 3.2.

Anmerkungen: Die Beispiele in 3.1 sollten Sie nach Möglichkeit bringen, aber das entsprechend vorbereiten (also nicht während des Vortrags an die Tafel schreiben, sondern schon vorher, oder als Folie bzw. mit dem Beamer zeigen). Illustrieren Sie die in 3.1 eingeführten Begriffe (Multiplizität, Tangente) an einigen dieser Beispiele.

Vortrag 7 (Die Schnittmultiplizität)**.**

Inhalt des Vortrags: [Fu] §3.3.

Anmerkungen: Die Schnittmultiplizität ist ein sehr wichtiges Werkzeug für die folgenden Vorträge. Vergleichen Sie sie mit der Vielfachheit einer Nullstelle. Im Beweis vom Lemma in 3.3, Teil (b), Zeile 3, muss es *Suppose* $r < n$ *or* $s < m$. heißen.

Vortrag 8 (Der projektive Raum)**.**

Inhalt des Vortrags: [Fu] §§4.1, 4.2.

Anmerkungen: Wie der Satz von Bézout zeigt (Vortrag 11), verhält sich die Schnittmultiplizität besser, wenn man statt affiner Kurven sogenannte projektive Kurven betrachtet. Als ersten Schritt für die Definition erweitern wir den affinen Raum zum projektiven Raum. Behandeln Sie Aufgabe 4.2. Die Aufgaben zu §4.2 werden im nächsten Vortrag besprochen.

Vortrag 9 (Projektive Varietäten)**.**

Inhalt des Vortrags: [Fu] *-Aufgaben zu §4.2; und §4.3.

Anmerkungen: Von den Aufgaben zu Abschnitt 4.2 sollten Sie mindestens 4.11, 4.12, 4.14 und 4.15 diskutieren.

Vortrag 10 (Ebene projektive Kurven)**.**

Inhalt des Vortrags: [Fu] §§5.1, 5.2.

Anmerkungen: Das Hauptergebnis ist Theorem 1 in §5.2, aber Sie sollten auch einige der *-Aufgaben zu Abschnitt §5.1 behandeln, zum Beispiel 5.1, 5.4, 5.7, 5.8. Die am Ende von §1.1 angegebenen Eigenschaften von (homogenen) Polynomen, insbesondere die Identität von Euler (Punkt (6) der Liste) können hier nützlich sein.

Vortrag 11 (Der Satz von Bézout)**.**

Inhalt des Vortrags: [Fu] §§5.3, 5.4.

Anmerkungen: Erklären Sie auch die Bemerkung am Ende von §5.4 und versuchen Sie, weitere Aussagen ähnlicher Art abzuleiten. Aufgabe 5.26 kann weggelassen werden.

Vortrag 12 (Der Satz von M. Noether und Anwendungen)**.**

Inhalt des Vortrags: [Fu] §5.5 und §5.6 bis einschließlich Cor. 2.

Anmerkungen: Die Aussage der Theorems von Noether ist etwas „technisch“. Daher ist es vielleicht sinnvoll, vor dem Beweis zu erklären, warum diese Satz sehr nützlich ist, zum Beispiel, indem man Proposition 2 aus §5.6 vorzieht. Im Beweis von Noethers Theorem sollte der Verweis auf Proposition 7 in §2.10 ersetzt werden durch Proposition 5 in §2.6.

Vortrag 13 (Das Gruppengesetz auf einer glatten Kubik)**.**

Inhalt des Vortrags: [Fu] §5.6 ab Prop. 3 und, soweit die Zeit reicht, Aufgaben 5.35, 5.36, 5.37.

Anmerkungen: Wir beenden das Seminar mit einer weiteren schönen Anwendung des Satzes von Noether, nämlich der Konstruktion des Gruppengesetzes auf einer glatten Kubik (mit einem fixierten Punkt). Eine glatte Kubik mit einem fixierten Punkt nennt man auch eine *elliptische Kurve*. Solche Kurven spielen in der algebraischen Geometrie und auch der Zahlentheorie eine ganz wesentliche Rolle, und ihre Gruppenstruktur hat daran einen bedeutenden Anteil. Die Konstruktion der Verknüpfung ist nicht sehr schwierig, aber um die Assoziativität zu zeigen, muss man sich mehr anstrengen. An dieser Stelle erhalten wir sie aus dem Satz von Noether. Es gibt auch andere Wege, aber diese sind entweder deutlich mühsamer (lange Rechnungen) oder erfordern wesentlich mehr Theorie (zum Beispiel den Satz von Riemann-Roch aus der algebraischen Geometrie).

Literatur

[Fu] W. Fulton, *Algebraic curves*, https://dept.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf (2008)