

Seminar über Elementare Algebraische Geometrie

Das Ziel des Seminars ist eine Einführung in die “klassische” algebraische Geometrie, also das Studium der Lösungsmengen von Systemen von Polynomgleichungen unter geometrischen Gesichtspunkten, und mit “elementaren” Methoden. Insbesondere wollen wir versuchen, relativ nah an der Geometrie zu bleiben. Das Seminar ist eine gute Vorbereitung, um danach die Vorlesung Algebraische Geometrie 1 zu hören. (Sie dürfen natürlich auch teilnehmen, wenn Sie diese Vorlesung parallel hören oder schon gehört haben.)

Eines der Hauptergebnisse des Seminars wird sein zu beweisen, dass auf jeder “glatten kubischen Fläche im projektiven Raum $\mathbb{P}_k^3$ (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k) genau 27 Geraden des $\mathbb{P}_k^3$ liegen”. Dafür werden wir zu Beginn des Seminars den Standardvektorraum k^n zum sogenannten projektiven Raum $\mathbb{P}_k^n$ erweitern und definieren, was wir unter Nullstellenmengen von homogenen Polynomen in $\mathbb{P}_k^n$ verstehen. Ein homogenes Polynom vom Grad 3 in 4 Variablen definiert dann eine kubische Fläche in $\mathbb{P}_k^3$.

1. ORGANISATORISCHES

— Siehe auch die Moodle-Seite zum Seminar. —

Termin. Dienstags, 16–18 Uhr, S-U-4.02. Beginn: 13.10.

ECTS-Punkte. Das Seminar ist ein Bachelor-Seminar in den Fachstudiengängen Mathematik (6 credit points).

Kontakt.

Ulrich Görtz ulrich.goertz@uni-due.de.

Die Seminarvorträge sollen an der Tafel gehalten werden und nicht länger als 80 Minuten dauern. Rechnen Sie bei der Planung mit Fragen der Zuhörer:innen und der Organisatoren. Danach stehen circa 10 Minuten für Fragen und eine Rückmeldung zum Vortrag zur Verfügung.

Im Nachgang eine schriftliche Ausarbeitung Ihres Vortrags abzugeben, ist nicht erforderlich (und kann auch nicht als Ersatz für einen erfolgreichen Vortrag dienen).

Für das Seminar gilt (moralische) Anwesenheitspflicht; es wird eine *aktive Teilnahme* erwartet. Für den Fall, dass Sie an einem Termin aus wichtigen Gründen verhindert sind, entschuldigen Sie sich bitte vorher bei der/dem Vortragenden und bei mir.

Erforderliche Vorkenntnisse. Gute Kenntnisse der Linearen Algebra und Algebra. Das schließt Grundbegriffe der Theorie der kommutativen Ringe und Ideale ein, insbesondere

- Ringe, Ideale, Primideale,
- Quotient eines Rings nach einem Ideal,
- Integritätsringe, Quotientenkörper.

Siehe zum Beispiel [GöA] Kapitel 3 oder [Bo] Kapitel 2.

Weitere Kenntnisse in Algebra 2 (Kommutative Algebra) und Grundkenntnisse in Topologie sind nützlich, aber nicht zwingend erforderlich.

2. ANFORDERUNGEN / WIE HALTE ICH EINEN GUTEN SEMINARVORTRAG?

- Richten Sie die Vorbereitung auf Ihren Vortrag nach dem Grundsatz aus, dass Ihre Zuhörer möglichst viel dabei lernen und „aus dem Vortrag mitnehmen“ sollen.
- Ihr erstes und wichtigstes Ziel sollte sein, die im Vortrag zu behandelnde Mathematik gründlich zu verstehen. Das wird in der Regel eine ganz Menge Zeit in Anspruch nehmen; beginnen Sie daher frühzeitig mit Vorbereitung!
- Stellen Sie viele Fragen (sich und den anderen Seminarteilnehmer:innen). Seien Sie diszipliniert darin, sich zu fragen, warum (ob) die im zugrundeliegenden Text aufgestellten Behauptungen richtig sind. Was lässt sich vereinfachen? Wenn Sie auf Dinge stoßen, die Sie nicht verstehen, fragen Sie die anderen Seminarteilnehmer:innen (diejenigen, die die Vorträge direkt vor oder nach Ihnen halten, haben sich vielleicht schon genau dieselbe Frage gestellt) oder im Forum auf der Moodle-Seite. Vielleicht ist im Buch ein Fehler? Wenn Sie damit noch nicht weiterkommen, können Sie Ihre Fragen mit mir besprechen.
- Wenn Sie die Mathematik verstanden haben, sollten Sie bewusst darüber nachdenken, wie Sie die Inhalte in Ihrem Vortrag darstellen möchten. Oft bietet es sich an, den Aufbau zu ändern, Sachen umzustrukturieren, zusätzliche Beispiele einzubauen, die Notation anzupassen, usw. — schließlich ist ein Vortrag etwas ganz anderes als ein geschriebener Text. Diese Restrukturierung ist Teil der Anforderung an Ihren Vortrag. Es genügt nicht, den Text aus dem Buch an die Tafel zu schreiben!
- Überlegen Sie im Vorfeld, was die Hauptpunkte Ihres Vortrags sind, die jede:r Teilnehmer:in lernen sollte, und berücksichtigen Sie das entsprechend. Sie können nötigenfalls Sachen im Vortrag auslassen (zum Beispiel eine technische Rechnung, die zum Verständnis nicht notwendig ist (schauen Sie sich trotzdem genau an, um gegebenenfalls Fragen beantworten zu können!)). Denken Sie bei der Vortragsplanung darüber nach, was sich zum Weglassen eignet, damit Sie nicht am Ende wegen Zeitmangels gezwungen sind, die interessantesten Teile zu überspringen.
- Denken Sie insbesondere darüber nach, was ein guter Einstieg in den Vortrag ist. Wie fügt sich der Vortrag ins Seminarprogramm ein? Warum sollte man sich für dieses Thema interessieren? Bereiten Sie auch einen guten Abschluss

des Vortrags vor.

- Die Sachen, die Sie in der Vorbereitung besonders viel Zeit gekostet haben, sollten Sie nicht auslassen, denn die anderen Teilnehmer:innen haben vermutlich ähnliche Schwierigkeiten beim Verständnis und können gerade an diesen Stellen viel lernen. Wenn doch einmal noch Fragen bei Ihnen offengeblieben sind, gehen Sie damit ehrlich um und versuchen Sie nicht, Probleme beim Verständnis zu verschleiern.
- **Aktive Einbindung der Teilnehmer:innen.** Das Seminar lebt von der aktiven Beteiligung aller Teilnehmer:innen an *allen* Vorträgen, nicht nur am eigenen. Die Beteiligung an den anderen Vorträgen ist eine Möglichkeit, Ihre Note im Seminar gegebenenfalls noch zu verbessern.

Die Beteiligung aller sicherzustellen, ist sowohl eine Aufgabe der Zuhörer:innen als auch der Sprecher:in. Konkret ist daher eine der Anforderungen an einen erfolgreichen Vortrag: Überlegen Sie sich mindestens drei Fragen, die Sie während Ihres Vortrags an das Publikum richten. Es kann sich um offene Fragen oder um Multiple-Choice-Fragen handeln. Wählen Sie Fragen aus, die sich von denjenigen, die dem Vortrag gefolgt sind, relativ schnell beantworten lassen, und die Ihnen ermöglichen, auf einen besonders wichtigen Punkt noch einmal hinzuweisen und/oder helfen zu entscheiden, was Sie vielleicht noch einmal anders/erneut erklären sollten oder worauf Sie im weiteren Verlauf den Fokus legen.

Wenn Sie Ihren Vortrag in den Grundzügen vorbereitet haben, und *spätestens zwei Wochen vor dem Termin Ihres Vortrags* sprechen Sie Ihren Vortrag mit mir durch. Dabei können Sie offene Fragen von Ihrer Seite klären. (Wenn Sie gar keine Fragen haben, sollten Sie noch einmal sehr selbstkritisch hinterfragen, ob Sie die Inhalte des Vortrag mathematisch wirklich hinreichend durchdrungen haben. Es ist für den Verlauf des Vortrag besser und auch für Sie angenehmer, wenn Sie nicht erst bei Nachfragen während des Vortrags feststellen, dass es doch noch Verständnislücken gibt.)

Es soll im Vordergrund stehen, dass alle Teilnehmer:innen gemeinsam etwas lernen. Daher sollten Sie als Sprecher:in Fragen im Vortrag immer willkommen heißen und als Unterstützung dabei sehen, Ihren Vortrag auf die Bedürfnisse der Teilnehmer:innen auszurichten. Umgekehrt: Geben Sie sich als Zuhörer:in Mühe, den Vorträgen der anderen aktiv zu folgen und stellen Sie dort Fragen, wo Sie etwas nicht verstehen.

Nutzen Sie die Möglichkeit, Ihre eigenen Schwerpunkte zu setzen und überlegen Sie sich, wie Sie Ihren eigenen Vortrag so gestalten können, dass Sie damit zufrieden sind.

3. LITERATUR

Wir richten uns nach dem Buch [Hu] von K. Hulek. Bei den Vortragsbeschreibungen im Programm unten gilt grundsätzlich Folgendes:

- Ein Vortrag ist etwas anderes als ein Buch, das heißt: Orientieren Sie sich inhaltlich am Text des Buchs, aber strukturieren Sie diese Inhalte so, wie es für einen Vortrag sinnvoll ist. Sie müssen (und sollten) im Vortrag nicht

alles, was im Buch steht, an die Tafel schreiben. Teils genügt eine mündliche Erklärung, und bei den Sachen, die Sie anschreiben, können Sie geeignet abkürzen.

- Wenn nötig (bzw. wenn Sie es für sinnvoll halten), führen Sie Begriffe aus früheren Abschnitten im Buch ein bzw. wiederholen Sie diese; auch dann, wenn die Abschnitte nicht im Programm vorkamen.

Andere Quellen finden Sie im Literaturverzeichnis am Ende des Buches, aber eigentlich sollten Sie diese nicht benötigen.

4. VORTRÄGE

Vortrag 1 (Einführung).

Einführung in das Seminarthema: [Hu] Kapitel 0 und Kapitel 1 bis Abschnitt 1.1.1.

Wir ändern die Definition einer *irreduziblen* Teilmenge (von $\mathbb{A}_k^n$ oder allgemeiner irgendeinem topologischen Raum) insofern, dass wir zusätzlich verlangen, dass $X \neq \emptyset$ ist. Dies ist die übliche Definition und sie umgeht einige kleine Schwierigkeiten im weiteren Verlauf. Da der Unterschied sich nur auf den Trivialfall der leeren Menge bezieht, ist das natürlich eine eher kosmetische Änderung.

Vortrag 2 (Der Hilbertsche Nullstellensatz).

Inhalt des Vortrags: [Hu] Abschnitt 1.1.2 bis Lemma 1.14.

Der Hilbertsche Nullstellensatz (Theorem 1.11) ist ein zentrales Ergebnis, um die Verbindung zwischen geometrischen Fragen und algebraischen Methoden herzustellen.

Vortrag 3 (Noether-Normalisierung).

Inhalt des Vortrags: [Hu] Abschnitt 1.1.2, Lemma 1.15 bis einschließlich Abschnitt 1.1.6.

Der Satz über die Noether-Normalisierung ist ein wichtiges Hilfsmittel im Beweis des Nullstellensatzes, aber auch von eigenem geometrischen Interesse (Abschnitt 1.1.4). Man beachte, dass Lemma 1.15 in der angegebenen Form nicht korrekt ist. Der Fall von Körpern positiver Charakteristik kann gegebenenfalls kurz gehalten werden.

Vortrag 4 (Polynomiale Funktionen und Abbildungen).

Inhalt des Vortrags: [Hu] Abschnitt 1.2.

Als nächstes führen wir die Abbildungen ein, die wir zwischen algebraischen Mengen betrachten möchten: In diesem Vortrag polynomiale Abbildungen und im kommenden Vortrag dann rationale Abbildungen. Letztere dürfen sozusagen auch Polstellen haben, sind also nur auf einem offenen Teil des “Definitionsereichs” tatsächlich definiert.

Halten Sie den Teil über Kategorientheorie *so kurz wie möglich*. Überlegen Sie sich für den Beweis von Satz 1.42, was man (im Lichte von Bemerkung 1.43) über die Topologie auf $V \times W$ benutzt.

Vortrag 5 (Rationale Funktionen und Abbildungen).

Inhalt des Vortrags: [Hu] Abschnitt 1.3.

Abschnitt 1.3.2 über die “Strukturgarbe” können Sie weglassen.

Vortrag 6 (Projektive Varietäten).

Inhalt des Vortrags: [Hu] Abschnitte 2.1, 2.2.

Als nächstes widmen wir uns einer Variante des Begriffs der affinen Varietät, nämlich den sogenannten *projektiven Varietäten* (und den *quasi-projektiven Varietäten* (Definition nach Lemma 2.9), die sowohl die affinen als auch die projektiven Varietäten als Spezialfälle enthalten). Interessanterweise ist diese Begriffsbildung auch dann nützlich, wenn man sich letztendlich nur für Nullstellengebilde in k^n von Polynomen, also für affine Varietäten selbst, interessiert.

Für die Nullstellenmenge homogener Polynome ist statt $V(f)$ bzw. $V(f_1, \dots, f_r)$ auch die Bezeichnung $V_+(f)$, $V_+(f_1, \dots, f_r)$ üblich. Wenn man von homogenen Polynomen (oder allgemeiner homogenen Elementen eines graduierten Rings) spricht, ist es eine übliche Konvention, dass 0 homogen von jedem Grad ist. Unter einer *Quadrik* versteht man die Nullstellenmenge eines (homogenen) Polynoms *vom Grad 2*. In Korollar 2.11 ordnen wir (weil bei uns die leere Menge nicht irreduzibel ist) der leeren Menge das Ideal (1) zu; das entspricht der allgemeinen Definition von $I(V)$ in diesem Fall und passt auch besser zu der Terminologie *irrelevantes Ideal* für m , weil dann eben m in der Menge oben links nicht aufgenommen wird (aber das Einsideal doch)). Die Aussage von Satz 2.12 lässt sich präzisieren: Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{P}_k^n$ ist genau dann offen, wenn für alle i die Teilmenge $j_i(U \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}_k^n$ offen ist.

Der Vortrag enthält viel Material, so dass Sie gut planen sollten, welche Teile Sie straff behandeln können.

Vortrag 7 (Rationale Funktionen und Morphismen).

Inhalt des Vortrags: [Hu] Abschnitt 2.3 bis einschließlich Teil 2.3.4.

Immer wenn von “affinen oder projektiven” Varietäten gesprochen wird, sollten Sie versuchen, alle quasi-projektiven Varietäten zu behandeln.

Die zentralen Ergebnisse sind Theorem 2.19, Theorem 2.23 und Satz 2.25. Der Vortrag ist recht lang; Sie müssen sicherlich einige Sachen auslassen. Zum Beispiel vielleicht den Beweis von Lemma 2.20.

Vortrag 8 (Glatte und singuläre Punkte).

Inhalt des Vortrags: [Hu] Abschnitt 2.3.5 und Abschnitt 3.1. Außerdem nach Möglichkeit einige der Übungsaufgaben zu diesem Kapitel, zum Beispiel Aufgabe 3.1, 3.2, 3.4.

Am Tangentialraum eines Punkt lässt sich gewissermaßen die lokale Struktur der Varietät ablesen (so wie die Tangente an den Funktionsgraphen einer differenzierbaren Funktion die Funktion dort gut annähert) und ermöglicht insbesondere die Unterscheidung zwischen glatten und singulären Punkten.

Vortrag 9 (Die Dimension einer Varietät).

Inhalt des Vortrags: [Hu] Abschnitt 2.3.6 und Abschnitt 3.2.

Ähnlich wie in der linearen Algebra liefert der Begriff der Dimension eine Möglichkeit, in gewissem Sinne die Größe einer Varietät zu messen. Wir diskutieren verschiedene äquivalente Möglichkeiten, die Dimension zu beschreiben. Abschnitt 3.2.2 über die Krulldimension können Sie kurz halten.

Vortrag 10 (Kubische Kurven).

Inhalt des Vortrags: [Hu] Abschnitte 4.1, 4.2.

Kurven in $\mathbb{P}_k^2$, die durch homogene Polynome vom Grad ≤ 2 definiert werden, sind recht leicht zu verstehen: Für Grad 1 erhält man einfach Geraden in der projektiven Ebene, und für Grad 2 kann man die Theorie der symmetrischen Bilinearformen aus der Linearen Algebra 2 heranziehen. Aber für Polynome von höherem Grad wird die Sache wesentlich komplizierter und interessanter. Kubische Kurven, also solche, die durch ein homogenes Polynom vom Grad 3 definiert werden, sind aus verschiedenen Gründen besonders wichtig und sind das Hauptthema dieses und des nächsten Vortrags.

Vortrag 11 (Glatte kubische Kurven und das Gruppengesetz).

Inhalt des Vortrags: [Hu] Abschnitte 4.3, 4.4.

Die Diskussion über glatte kubische Kurven über den komplexen Zahlen und die Weierstraßsche $\wp$ -Funktion können Sie kurz halten oder auslassen.

Vortrag 12 (Kubische Flächen).

Inhalt des Vortrags: [Hu] Abschnitt 5.1

Wir beginnen nun den letzten Teil des Seminars, in dem wir den berühmten Satz beweisen wollen, dass jede glatte kubische Fläche $V_+(f) \subset \mathbb{P}_k^3$ (also f homogen vom Grad 3) genau 27 Geraden des $\mathbb{P}_k^3$ enthält, eine erstaunliche Tatsache! In diesem Vortrag soll zunächst als wichtiger Zwischenschritt gezeigt werden, dass es jedenfalls mindestens eine Gerade gibt, die auf so einer Fläche liegt.

Vortrag 13 (Rationalität kubischer Flächen).

Inhalt des Vortrags: [Hu] Abschnitt 5.2 bis Satz 5.8 (mit Beweis) und die Anwendung Satz 5.13.

In diesem Vortrag wird die Konfiguration von Geraden auf einer kubischen Fläche weiter untersucht. Als Anwendung können wir zeigen, dass jede kubische Fläche rational, also birational zu $\mathbb{P}_k^2$ ist.

Vortrag 14 (Die 27 Geraden auf einer kubischen Fläche).

Inhalt des Vortrags: [Hu] Abschnitt 5.2 von Lemma 5.9 bis zum Ende.

Hier schließen wir den Beweis über den Satz über die 27 Geraden auf einer glatten kubischen Fläche ab.

LITERATUR

- [Bo] S. Bosch, *Algebra*, Springer Spektrum,
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-67464-2>
- [GöA] U. Görtz, *Algebra*, Vorlesungsskript WS 2021/22,
<https://math.ug/a-ws2122/>
- [Hu] K. Hulek, *Elementare algebraische Geometrie*, Springer-Verlag,
<https://doi.org/10.1007/978-3-8348-2348-9>